UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Calculo III (521227)

Profesor : Jorge Ruiz C.
Ayudante : Andrés Campos O.

Calculo Vectorial

Green, Gauss, Stokes

GREEN

A.- Dominios simples conexos.
1.- Encontrar el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ ; \quad a,b \in \mathrm{IR}^2$$

Como es una curva cerrada simple, entonces el área de la región esta dada por:

$$A(D)=\frac{1}{2}\int_C -ydx+xdy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_C (-y,x)d\vec{r}$$

Solución:

Sea $\left.\begin{matrix} x=a\cos t \\ y=bsent \end{matrix}\right\} 0\le t\le 2\pi$

Entonces $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$ es una representación para $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\vec{r}(t)`=(-a\cdot sent, b\cdot\cos t)$

$$\int_C \vec{F}d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-bsent, a\cos t)\cdot(-asent, b\cos t)dt=\int_0^{2\pi} abdt = ab2\pi$$

$$\therefore A(E)=ab\pi$$

B.- Regiones Multiconexas

2.- Calcular $\oint_C \vec{F}d\vec{r}$ donde $\vec{F}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ y $C:4x^2+9y^2=36$

Solución:

Se tiene que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\therefore \int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d(x,y)=0=\oint_C \vec{F}d\vec{r}-\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$$

Donde γ es una curva cualquiera interior a C y que encierra el origen, y D es la región limitada por C y γ.

Por ejemplo $\gamma: x^2+y^2=1 \circlearrowleft \quad r(\cos t, sent),\ 0\le t\le 2\pi$

$$\therefore \int_C \vec{F}d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(-sent,\cos t)(-sent,\cos t)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

GAUSS

3.- Evaluar la integral $\int_S (0,y,z)\hat{n}dA$ donde S es la superficie en el primer octante determinado por el plano $x+y+z=1$ y los planos coordenados x=0, y=0 y z=0. $\hat{n}$ Normal exterior a S.

Solución:

$\vec{F}(x,y,z)=y\hat{j}+z\hat{k}$ $\quad C^1$

$$Div(\vec{F}(x,y,z))=(0+1+1)=2$$

$$\int_S \vec{F}(x,y,z)\hat{n}dA=\iiint_D Divf(x,y,z)d(x,y,z)=\iiint_D 2d(x,y,z)=2V(D)=2(\frac{1}{6})$$

Donde *D* es la region limitada por S (prisma) se tiene que:

$$D=\{(x,y,z):0\le z\le 1-x-y, 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\}$$

$$\int_D d(x,y,z)=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}dzdydx=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \int_S \vec{F}(x,y,z)\hat{n}dA=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$