Resumen Teoremas Calculo III

Edita Sebastián Vergara Peña
Tomadas de las clases del Prof. Emilio Bello

7 de julio de 2013

1. Curvas paramétricas en $\mathbb{R}^n$

Definición 1 (Curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$) *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ y sean $A, B \in C$. Diremos que C es una curva paramétrica en $\mathbb{R}^n$ que une a A con B, si existe una función vectorial $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que:*

$$i. \quad f([a, b]) = C$$

$$ii. \quad f(a) = A \text{ y } f(b) = B$$

Nota 1

1. *A la función f se le denomina **representación paramétrica de la curva** C. a t se le conoce como **parámetro**.*
2. *C es derivable (continua) si f es derivable (continua).*
3. *Sea f la representación paramétrica de C, diremos que $f(t_1)$ precede a $f(t_2)$ si $t_1 < t_2$. Además, $f(a)$: Punto inicial en C, $f(b)$: Punto terminal en C.*
4. *Funciones vectoriales diferentes pueden representar una misma curva, en tal caso a tales funciones se les llama **funciones equivalentes**.*

Definición 2 (Traza de una curva) *Sea C una curva en $\mathbb{R}^n$ representada por $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Llamaremos traza de C al conjunto $Tr(C) = \{x \in \mathbb{R}^n / \exists t \in [a, b] : x = f(t)\}$*

Observación: Dos curvas diferentes pueden tener la misma traza.

Definición 3 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ representación de la curva C.*

1. *f es inyectiva en $]a, b[\quad \Rightarrow C$ es una **curva simple**.*
2. *$f(a) = f(b) \Rightarrow C$ es una **curva cerrada**.*
3. *f derivable en $]a, b[$ y $f'(t) \neq 0, t \in [a, b] \Rightarrow C$ es una **curva suave**.*
4. *Si $\{C_k\}_{i=1}^{k}$ es una familia finita de curvas yuxtapuestas tal que $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$*
5. *C es **seccionalmente suave** si puede descomponerse en un numero finito de curvas $C_1 + C_2 + \ldots + C_k$ (yuxtapuestas) tal que:*
   a) *$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$*
   b) *Cada C_k es suave.*

2. Integrales de Linea

2.1. Integrales de Linea sobre campos escalares

Definición 4 (Integral de linea sobre un campo escalar) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **continua** y sea C una **curva suave en D**, representada mediante $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Se define la integral de linea del campo escalar f a lo largo de C como:*

$$\int_C f \mathrm{d}s = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Observaciones:

1. La definición de $\int_C f \mathrm{d}s$ es independiente de la representación paramétrica elegida para C.
2. $\int_C f \mathrm{d}s = \int_{-C} f \mathrm{d}s$ ($-C$: curva opuesta, recorrida en sentido contrario, de C).
3. Si $f(x) = 1, x \in D$, y C una curva suave en D, entonces $\int_C f \mathrm{d}s = \int_{-C} \mathrm{d}s$, la cual representa la **longitud de arco de C**, $l(C)$. Si $C : r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$l(C) = \int_a^b \|r'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

4. Si f representa la **densidad de masa** de un alambre cuya traza comprende una curva suave C, la **masa total del alambre** está dada por

$$m_T = \int_C f \mathrm{d}s$$

2.2. Integral de Linea sobre campos vectoriales

Definición 5 (Integral de linea sobre un campo vectorial) *Sea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **continua** y sea C una **curva suave en D** representada paramétricamente por $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (derivable). Se define la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de C mediante*

$$\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Notas:

1. Se prueba que $\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$ es independiente de la representación elegida para C.
2. Si $\vec{F}$ representa un campo de fuerza:

$$W_{[a,b]} = \int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

3. $\int_{-C} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = -\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$

4. Si $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$ es **seccionalmente suave** en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ es **continua** sobre un abierto que contiene a C, entonces:

$$\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

Definición 6 (Independecia de las trayectorias) *Sea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Diremos que $\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$ es independiente de las trayectorias en D (con igual pto. inicial e igual pto. terminal), si para todo C_1, C_2*

$$\int_{C_1} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

donde los puntos terminales de C_1 y C_2 son iguales.

Propiedad 1 *Sea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo continuo. $\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y solo si*

$$\oint_\gamma \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = 0 \quad (\oint := \textit{integral de línea sobre curvas cerradas})$$

donde γ es una curva cerrada cualquiera en D.

Observacion: Si en D existe una curva cerrada γ tal que $\oint_\gamma \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$, entonces $\int_C \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$ no es independiente de la trayectoria en C.

Teorema 1 (Teorema fundamental del Calculo Vectorial) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y sea C una curva suave en D con punto inicial $\vec{a}$ y terminal $\vec{b}$. Entonces,*

$$\int_C \nabla f \mathrm{d}\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

Observación: $\int_C \nabla f \mathrm{d}\vec{r}$ es independiente de las trayectorias en D.

Definición 7 (Campos Conservativos) *Sea $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Diremos que $\vec{F}$ es conservativo en D si existe un campo escalar $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbf{R}$ de clase C^1 tal que*

$$\forall x \in D; \quad \nabla f(x) = \vec{F}$$

Nota: Recordemos que si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase $C^1(D)$ y tal que $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$, entonces

$$\vec{F} \text{ es conservativo en } D \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \forall x \in D;\ i, j = \overline{1, n}$$

Definición 8 (Rotacional de un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$) *Sea $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1. Se define el rotacional de $\vec{F}$ en D, $rot(\vec{F})$, mediante*

$$rot\vec{F}(x) = \nabla \times \vec{F}(x, y, z)$$

Observaciones:

1. Notar que
$$\nabla \times \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

2. Si $\nabla \times \vec{F} = 0, \vec{F}$ es **irrotacional**.

3. Si $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1, por definición,
$$\nabla \times \vec{F} = \hat{k}(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

4. $\nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$

5. $\nabla \times (\lambda\vec{F}) = \lambda\nabla \times \vec{F}$

6. $\nabla \times (\nabla\vec{F}) = \theta$

7. $\vec{F}$ es conservativo $\Rightarrow rot\vec{F} = \theta$ (en D)

8. $rot\vec{F} = \theta \nRightarrow \vec{F}$ no es conservativo.

9. $rot\vec{F} = \theta \Rightarrow \vec{F}$ puede o no ser conservativo.

Definición 9 (Conjuntos Simple Conexo) *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que D es simple conexo en $\mathbb{R}^n$ si cada curva simple cerrada en D puede reducirse mediante transformación continua en D a un punto en D. En el caso contrario, se dice que D es multiconexo.*

Observación: Todo conjunto perforado en $\mathbb{R}^2$ es multiconexo.

Propiedad 2 *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ simple conexo y sea $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1, entonces*

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ y } x \in D \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \vec{F} \text{ es conservativo en } D \\ \Leftrightarrow \int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \text{ es independiente de la trayectoria.} \\ \Leftrightarrow \oint_\gamma \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0 \end{array}$$

Observación: Si $\vec{F} \equiv (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$, entonces se usa la notación

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_C F_1(x)\mathrm{d}x_1 + \cdots + F_n(x)\mathrm{d}x_n$$

2.3. Teoremas de Green

2.3.1. Teorema de Green para regiones simple conexas

Definición 10 *Sea R una región simple conexa del plano con frontera una única curva cerrada simple C y sean P, Q funciones de clase C^1 sobre un abierto que contiene a R. Entonces*

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}(x,y)$$

donde C se recorre en sentido antihorario.

Notas: Si $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

1. $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}(x,y)$
2. Si $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, entonces $\vec{F}$ es conservativo ($\because \int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$)

2.3.2. Teorema de Green para regiones multiconexas

Definición 11 *Sea C una curva cerrada simple, seccionalmente suave, y sean $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$ curvas cerradas simples, seccionalmente suaves, contenidas al interior de C y tal que*

i. $\forall i \neq j \; ; \; C_i \cap C_j = \emptyset$
ii. $\forall i \neq j \; ; \; C_i$ *se encuentra al exterior de* C_j

Sean P, Q funciones escalares de clase C_1 sobre un abierto que contiene a la región R limitada por las curvas $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Entonces:

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}(x,y) + \sum_{i=0}^{k} \oint_{C_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

donde $C, C_1, C_2, \ldots, C_k$ se recorren en sentido antihorario.

3. Superficies en $\mathbb{R}^n$

4. Integrales de Superficie

4.1. Integrales de Superficie sobre Campos Escalares

4.2. Integrales de Superficie sobre Campos Vectoriales

4.3. Teorema de Gauss

4.4. Teorema de Stokes