ECONOMIA Y ADMINISTRACION Nº 52, jul 99, pp 7-22

ELASTICIDAD, DURACIÓN Y TIEMPO DE UN BONO.

JOSÉ RIGOBERTO PARADA DAZA[1]

RESUMEN

El concepto "duración" de un bono se ha asociado como equivalente a período de tiempo. Tal interpretación se deriva de una expresión operacional de Cálculo Diferencial, y es menos adecuada que su verdadero significado como un concepto de elasticidad, que es lo más acertado. Es común observar el enfoque del concepto duración como un período de tiempo en diferentes manuales de Finanzas, lo que ha llevado a un uso generalizado de esta interpretación. Este tema es tratado en este artículo desde un punto de vista conceptual para volver al concepto de duración como de elasticidad, que es su verdadera dimensión.

I. INTRODUCCION

El concepto de duración de un bono e introducido por Macaulay (1938) es una medida de elasticidad, ya que lo que se analiza es cómo debería variar el precio de un bono frente a alteraciones en la tasa de interés de mercado. Aplicando conceptos de Cálculo Diferencial, se ha obtenido como resultado un promedio ponderado del tiempo de vigencia del bono, donde la ponderación es la importancia de los flujos generados por el proyecto respecto al valor total del bono, formado por la sumatoria de dichos flujos actualizados. Esta interpretación del concepto ha llevado a que en textos y manuales sobre Finanzas se considere que la duración sea trimestres, semestres o años. La forma mecánica del cálculo de la elasticidad ha llevado a que en la literatura predomine éste como un concepto asociado a plazo y no a elasticidad.

Paralelamente se han desarrollado otras definiciones de duración. Estos dos aspectos, el de duración como elasticidad y otras definiciones se explican en este artículo, cuyo objetivo es clarificar el concepto. Para ello se analiza el concepto de duración, la capitalización y su relación con la duración, el concepto de duración entendido como una serie matemática, el precio del bono a través del concepto duración, mediciones alternativas de la duración, finalizando con un ejemplo aplicado del concepto duración. La conclusión es que el concepto de duración es más apropiado como una definición sin dimensión de tiempo.

[1] Profesor e Investigador del Departamento de Administración de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Concepción.

II. CONCEPTO DE DURACION DE UN BONO.

Dadas las características del bono como un instrumento de renta fija, se sabe que los flujos que éste genera durante su vida y que incluyen el interés y la amortización, pueden ser constantes y a la vez éstos son contractuales. Así, la tasa de interés pactada inicialmente no es modificada durante el período de vigencia del bono. Con estos datos, se puede determinar el valor par del bono el cual representa su saldo insoluto; si el bono se cotiza en el mercado a un valor diferente al valor par, ello indica que la tasa de interés vigente en el mercado es diferente a la tasa contractual del bono. Así, si un bono se cotiza a menos del 100% del valor par, ello indica que la tasa de interés de mercado es superior a la tasa contractual del bono.

De esta manera, la tasa de interés de mercado origina cambios en el valor de cotización del bono, y será relevante determinar cómo variará el precio del bono ante cambios en la tasa de interés de mercado, lo que se plantea a continuación.

En efecto, el valor de un bono se expresa de la siguiente forma:

$$P=\frac{F_1}{(1+k)}+\frac{F_2}{(1+k)^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{F_n}{(1+k)^n}+\frac{A}{(1+k)^n} \qquad (1)$$

donde:

F_t = flujo de interés pagado por el bono en el período t.
A = amortización del bono, efectuado en el período final de vigencia del bono.
k = tasa de interés pactada inicialmente.
P = valor del bono.
n = plazo de vigencia del bono.

En (1) se ha supuesto que el bono se amortiza totalmente al final de la vida (n), aunque existen otras modalidades de amortización. En el planteamiento inicial del cálculo de la duración de un bono, se asume que la amortización se efectúa al término de su período de vigencia, y que en los períodos sólo se pagan intereses. Existe, también, el tratamiento del denominado bono cupón cero el que supone que paga interés y amortización al final de la vida del bono.

Si se deriva el valor respecto al factor de actualización, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dP}{d(1+k)}= -F_1\,(1+k)^{-2}-2F_2(1+k)^{-3}\ldots\ldots-nF_n(1+k)^{n+1}-nA(1+k)^{n+1} \qquad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de (2) por (1+k)/P y además, por ser el bono un instrumento donde P es el precio del bono según una nueva tasa de renta fija (se sabe que $F_1 = F_2 = \ldots = F_n = F$), entonces se tiene:

$$\frac{dP/P}{d(1+k)/(1+k)}=-\frac{1}{P}\left[\frac{F}{(1+k)}+\frac{2F}{(1+k)^2}+\ldots+\frac{nF}{(1+k)^n}+\frac{nA}{(1+k)^n}\right] \qquad (3)$$

Reagrupando se obtiene:

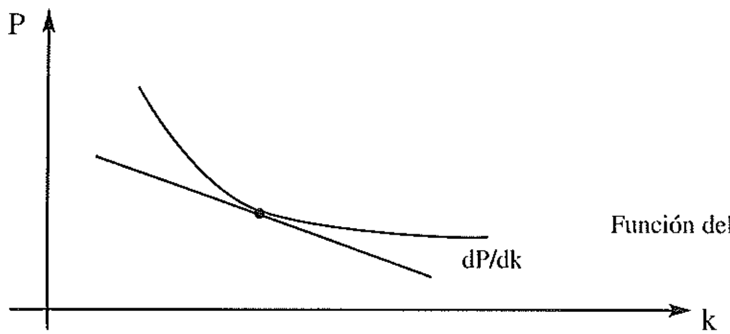
$$\frac{dP/P}{d(1+k)/(1+k)}=-\left[\frac{F}{(1+k)}\cdot\frac{1}{P}+2\left(\frac{F}{(1+k)^2}\cdot\frac{1}{P}\right)+\ldots+n\left(\frac{F}{(1+k)^n}\cdot\frac{1}{P}\right)+\frac{nA}{(1+k)^n}\right] \qquad (4)$$

El lado izquierdo de (4) es un concepto de elasticidad y representa el cambio porcentual que debería sufrir el valor de un bono, ante un cambio porcentual muy pequeño en la tasa de interés. Por otro lado, el signo negativo implica que ante un aumento de la tasa de interés, el precio del bono debería bajar, para que éste sea demandado frente a otras alternativas del mercado que a esa mayor tasa tendrían mayor demanda. El subterfugio algebraico de multiplicación de ambos miembros por (1+k)/P es lo que ha dado origen a lo que se denomina *duración modificada*. Sin embargo, el sentido de la igualdad no se ve alterado en cuanto a que sigue siendo una concepción sin dimensión y sigue representando número de veces, es decir, elasticidad. Este subterfugio algebraico es el que ha llevado a la interpretación de que este concepto de elasticidad tendría una dimensión temporal, lo que se derivaría del lado derecho de (4). En verdad, dP/P representa el cambio (en tanto por uno) del valor del bono y d(1+k)/(1+k) representa el cambio (en tanto por uno y aproximado) de la tasa de interés; por lo que el cuociente entre ambos, es decir (dP/P) /(d(1+k)/(1+k) sigue siendo un concepto de elasticidad y representa el cambio, en número de veces, que se dará en el valor del bono ante cambios muy pequeños en la tasa de interés; en términos discretos indica el cambio en el valor ante cambios en una unidad en la tasa de interés.

Cooper (1977) expone lo que sería la paradoja de que un lado de (4) sea sensibilidad o elasticidad y el otro sea considerado como dimensión de tiempo. La razón que explica, según su análisis, esta paradoja es que el factor de actualización $(1+k)^n$ no es lineal en el tiempo y que esto se solucionará si en vez de capitalización discreta se usa capitalización contínua, es decir, cuando se usa este tipo de capitalización no existiría la duración como concepto dependiente del tiempo. Este autor afirma que la elasticidad definida depende de la longitud del tiempo sobre el cual el factor de descuento es definido, sin dimensión. Es evidente que la definición (4) depende de *t*, pero el hecho de que sea dependiente del tiempo no implica definir una dimensión, ya que ésta depende de qué factores multiplican a *t* y que en este caso, como se explicará, ese factor es unidad monetaria válida por una unidad de tiempo.

Esta interpretación de elasticidad tiene validez considerando los supuestos implícitos en Cálculo Diferencial, es decir, que la función que represente al valor del bono sea contínua, lo que permite que sea derivable en toda su extensión, y lo segundo es que la derivada es un límite cuando la variación en la tasa de interés tiende a cero. Estos dos aspectos matemáticos del problema tienen enorme importancia al traspasar este concepto al mundo real, ya que su cálculo no coincide necesariamente con los datos tomados de la realidad. Por otro lado, si existe esa función continua, lo que indica el lado izquierdo de (4) es la pendiente de la curva de precio del bono. Efectuando un análisis matemático de la expresión (1), se obtiene el Gráfico Nº 1.

GRÁFICO Nº 1.
RELACIÓN ENTRE VALOR DEL BONO (P) Y TASA DE INTERÉS (k)



En el Gráfico Nº1 se expresa lo que representa la elasticidad, que es cómo cambiaría el precio ante un cambio en la tasa y que está dada por la pendiente de la curva del precio del bono en el punto X[2].

Analizando el lado derecho de la expresión (4) se tiene, *per se*, que representa, con signo contrario, un promedio ponderado del tiempo de duración del bono, donde la ponderación es F_t/P, es decir, la importancia que cada flujo tiene con respecto al valor total del bono. A esta sumatoria es lo que se denomina duración del bono, y se reduce a lo expresado en (5).

2 Sin embargo, la pendiente no es una medida correcta de la elasticidad, ver Blair-Kenny (1983), pág.43 y Martínez (1993), pág. 350. Por otro lado, la elasticidad es válida sólo para un punto.

$$D=(1/P)\left[\sum_{t=1}^{n} tF_t/(1+k)^t\right]+nA/P(1+k)^n \qquad (5)$$

La expresión (5) es la que predomina en la literatura sobre el tema. Su interpretación no es clara, pues el significado definido como un período de tiempo no es del todo adecuado. En efecto, al multiplicar el período t por el flujo F, se pierde la dimensión de tiempo, ya que el flujo F está referido a un período, que puede ser un año o un semestre. Entonces la dimensión resultante queda expresada en unidades monetarias y no en unidades de tiempo, luego al quedar unidades monetarias en el numerador y denominador, resulta un número sin dimensión. Lo que esto indica es que un flujo cualquiera F se refiere a un período específico, es decir, éste se expresa en unidades monetarias/unidades de tiempo ($\$/t$). Esto se puede aclarar cuando se usa el concepto de Costo Anual Equivalente (CAE), donde el valor actual de dinero se transforma a flujos equivalentes por período; es decir el CAE no es independiente del tiempo; igual situación se da en el concepto de anualidad usado en Matemáticas Financieras. Expresando formalmente la expresión $\Sigma\, tF_t/(1+k)^t P$ se tiene para un t cualquiera lo expresado en (5a).

$$\frac{t(\$/t)}{(1+k)^t\$} = \text{unidad sin dimensión de tiempo}$$

Otra forma de aclarar este tema es considerar un bono que sólo paga intereses periódicos iguales y se amortiza el total del bono al final del período de vigencia. Supongamos, el mismo ejemplo de (1) con $F_1 = F_2 = \dots\dots\dots F_n = F$, entonces, el valor del bono es:

$$P=F\left[\frac{1-(1+k)^{-n}}{k}\right]+\frac{A}{(1+k)^n} \qquad (6)$$

Calculando dP/d(1+k) y multiplicando la identidad por (1+k)/P se tiene:

$$\frac{dP/P}{d(1+k)/(1+k)}=\frac{n(1+k)^{-n}}{k}\,\frac{F}{P}+\frac{(1+k)^{-n+1}}{k^2\;P}-\frac{(1+k)F}{P}\cdot\frac{nA(1+k)^{-n-1}}{P} \qquad (7)$$

De los términos de (7) se ve que no existe el promedio ponderado del tiempo como se explicita en (3) lo que invalida la interpretación del concepto duración como un período de tiempo.

Algunos autores expresan la duración como un período de tiempo, tal como lo afirman Sousa, Ezquiaga y Zoido, (1992), pág. 173, duración es el período medio entre el presente y el final de la corriente de ingresos totales actualizados", o Edwards y Ma (1992), pág.629, "la duración es comúnmente definida como un promedio ponderado de la madurez del bono, donde la ponderación son las fracciones de los *cash flow* respecto al precio del bono en cada período". La interpretación como un período se debe más bien a una expresión operacional de la medida de elasticidad, tal como lo señala Copeland y Weston (1988) pág. 489. Por su parte, Chambers, Carleton y McEnelly (1988) señalan que algunos investigadores no usan esta terminología ya que las derivadas no son una pura unidad de tiempo.

De acuerdo con lo anterior, no se puede interpretar que un aumento porcentual de un uno por ciento en la tasa de interés (en caso discreto) o de una pequeña variación (en caso contínuo) implique que el precio del bono se modificará en D períodos, porque carece de sentido como medida de elasticidad. Resulta poco convincente, matemáticamente, que la expresión (5) tenga una interpretación para el lado izquierdo diferente que para el derecho. Si el lado izquierdo de la identidad es adimensional, no hay justificación para que el lado derecho adquiera la dimensión tiempo. Por otro lado, es difícil argumentar que la pendiente de la función dP/dk entre dos variables, tasa de interés y precio, sea una tercera variable implícita que sería el tiempo. El concepto de duración que se ha utilizado en los manuales se ha acomodado de tal forma que incluso se ha omitido su signo y se ha considerado como un valor absoluto.

Levenfeld y De la Maza (1997) sostienen que el concepto de duración introducido por Macaulay tiene el inconveniente de su doble significado: duración en sentido vulgar de la palabra que indica vida del activo hasta su cancelación, lo que identifica con el lado derecho de la expresión (5), y el concepto de elasticidad, que identifica con el lado izquierdo de (5), y posteriormente establecen que Elasticidad = - Duración. Este es un ejemplo de los textos de cómo abordar el tema; es decir el lado izquierdo carece de dimensión, pues es un coeficiente de sensibilidad o elasticidad y el lado derecho tiene dimensión, en este caso tiempo. Sin embargo, la expresión (5) es una identidad, por lo tanto el lado derecho no puede ser diferente al del lado izquierdo, ya que se llegó a ella a partir de una misma base.

III. DURACIÓN CON CAPITALIZACIÓN DE INTERESES EN PERÍODOS MENORES AL AÑO

En la definición de duración se consideró que el período de capitalización es anual, sin embargo los bonos pueden tener períodos de capitalización de semestres, trimestres u otros por lo que es necesario aclarar este concepto. Así, cuando la capitalización de los intereses de un bono tiene períodos diferentes a un año, entonces ésta también cambia como consecuencia de las variaciones en las tasas de interés. Así, si se toma una capitalización semestral, entonces la sensibilidad del precio del bono con períodos semestrales alcanza a un poco más del doble de la sensibilidad del bono con capitalización anual.

Así, se sabe: $(1+k_A) = (1+ k_S)^2$

donde:

k_A = tasa de interés con capitalización anual

k_S = tasa de interés con capitalización semestal.

Luego,

$$\frac{dk_A}{dk_S} = 2(1+k_S)$$

Para capitalización trimestral versus capitalización anual se tiene:

$$\frac{dk_A}{dk_T} = 4(1+k_T)^3$$

donde: k_T = tasa de interés con capitalización trimestral

De acuerdo con lo anterior, las duraciones de bonos son comparables sólo entre bonos con tipos de capitalizaciones de un mismo período, pues de otra forma siempre un bono con capitalizaciones menores a un año tendrán sensibilidades superiores a los bonos de capitalización anual. Un caso extremo de capitalización es cuando ésta se efectúa en forma continua.

Para calcular la relación entre duraciones con capitalizaciones de *t* períodos en el año y un bono con capitalización anual, se demuestra a continuación una relación funcional general.

Se sabe que: $(1+k_A) = (1+k_T)^T$ (8)

Donde k_T = tasa de interés equivalente con T capitalizaciones en el año.

Entonces:

$$\frac{dP/P}{d(1+k_A)/(1+k_A)} = -D_A \qquad y \qquad \frac{dP/P}{d(1+k_T)/(1+k_T)} = -D_T \qquad (9)$$

Donde D_A y D_T son las duraciones con capitalización anual y con capitalización a T períodos respectivamente. Haciendo arreglos algebraícos en (8) y (9) se tiene

$$D_T\left(\frac{d(1+k_T)}{(1+k_T)}\right)=D_A\left(\frac{d(1+k_A)}{(1+k_A)}\right) \qquad (10)$$

o bien;

$$\frac{d(1+k_A)}{d(1+k_T)} = \frac{D_T}{D_A}\frac{(1+k_A)}{(1+k_T)} \qquad (11)$$

Pero por (8) se tiene que:

$$\frac{d(1+k_A)}{d(1+k_T)} = \mathrm{T}(1+k_T)^{T-1} \qquad (12)$$

Reemplazando (12) en (11) se obtiene:

$$\mathrm{T}(1+k_T)^{T-1} = \frac{D_T}{D_A}\frac{(1+k_A)}{(1+k_T)} \qquad (13)$$

Entonces:

$$D_T = D_A T \ \frac{(1+k_T)^{T-1}(1+k_T)}{(1+k_A)}$$

Como $(1+k_A) = (1+k_T)^T$,

Entonces:

$$D_T = TD_A \qquad (14)$$

De acuerdo con (14) la duración con capitalización en T períodos es equivalente a T veces la duración con capitalización anual. Así, si las capitalizaciones son trimestrales (T=4), entonces la duración de un bono con este tipo de capitalización es equivalente a cuatro veces la duración de un bono semejante pero con capitalización anual, cuando a ambos los diferencia sólo el período de capitalización y ambos tienen una tasa equivalente dada por la relación (8).

IV. LA DURACION ENTENDIDA COMO UNA SERIE MATEMÁTICA

A partir del concepto de duración clásico se puede deducir que éste es el desarrollo de una serie de pagos, idea recogida por Christensen y Sorensen (1994), pág. 51, quienes hacen uso de la extensión de la serie de Taylor para explicar el significado de duración de un bono. Esta idea también es expresada por Dunetz y Mahoney (1988) pág. 53, Sousa, Ezquiaga y Zoido (1992) pág. 174, y Kremer, G.H.M.J. (1993), pág. 44.

Desarrollando la serie, se obtiene:

$$P(k) = P(k_o) + \frac{dP}{dk}(k - k_o) + \frac{1}{2!}\frac{d^2P}{dk^2}(k - k_o)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{dP}{dk^n}(k - k_o) \qquad (15)$$

Reduciendo (15) en términos de variación y sólo tomando los dos primeros términos, ya que el resto de la serie tiene un valor pequeño (ver Thomas, 1968, pág. 721-723), se tiene lo siguiente:

$$\Delta P = \frac{dP}{dk}\Delta k + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dk^2}(\Delta k)^2 \qquad (16)$$

Dividiendo por P, se obtiene:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial k}\Delta k + \frac{1}{2P}\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}(\Delta k)^2 \qquad (17)$$

La expresión (16) indica que la variación en el precio de un bono se debe a la duración del bono ($\partial P/\partial k$) y al concepto de convexidad ($\partial^2P/\partial k^2$), ambos multiplicados por la variación en la tasa de interés. Desde un punto de vista matemático la duración del bono equivale a la primera derivada del valor del bono respecto a la tasa de interés y la convexidad equivale a la segunda derivada de la función del valor par del bono. Esto último refleja el cambio en la duración del bono cuando cambia la tasa de interés.

La expresión (17) refleja que el cambio porcentual en el precio depende de la duración y de la convexidad. El uso primario de la duración y la convexidad es un instrumento de control del riesgo de la tasa de interés. Por otro lado, a medida que se da linealidad entre el precio y la tasa de interés, entonces las variaciones en el precio del bono estarán más influidas por la duración que por la convexidad, sin embargo tal linealidad, por definición de interés acumulado a capitalización compuesta, no se puede plantear en términos prácticos y sólo tendría validez en una reducción teórica del problema.

V. OTRAS MEDICIONES ALTERNATIVAS DE LA DURACION DE UN BONO

Se han desarrollado otros métodos de cálculo de la duración, tales como el de Derosa, Goodman y Zazzarino (1993), quienes plantean una medida empírica de la duración de un bono, entendiendo ésta en su versión con mayor soporte, es decir, como un concepto de elasticidad y no como un período de tiempo. Plantean que la duración simplemente refleja el cambio en el precio para un cambio dado en el rendimiento del bono.

Sostienen que la duración para un título dado será diferente para distintos niveles de precios, así como para diferentes expectativas de prepagos de los bonos. Establecen que una medición empírica de la duración es una relación funcional que se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\Delta P}{P} = c + b_1 \Delta k + b_2 (P-100)\Delta k + b_3 [(P-100)^2]\Delta k + \tilde{e} \quad si\ p>0 \tag{18}$$

Donde el primer término (c) es una constante; el segundo término (b_1) mide el porcentaje del cambio en el precio, que es capturado por el cambio en las rentabilidades; el tercer y cuarto término (b_2 y b_3) modifican al segundo término, permitiendo variar la duración dependiendo del nivel de precios del emisor, y $\tilde{e}$ es el error aleatorio. Esta fórmula implica el uso del método de los Mínimos Cuadrados que los autores usan en su artículo para varios títulos.

Pinkus y Chandoha (1986), utilizan otra medida empírica de la duración y que ellos llaman directamente volatilidad; así usan lo siguiente:

$$\%\ \Delta\ G_{85\text{-}90} = b\ x\ \%\ \Delta\ G_C \tag{19}$$

donde la variable del lado izquierdo de (19) $\%\ \Delta G_{85\text{-}90}$, representa una serie de tiempo histórica de los porcentajes de cambio de precios diarios de los GNMA's que son cupones de Bonos Hipotecarios del Gobierno Nacional de EE.UU. transados entre 1985 y 1990. La variable independiente, $\%\ \Delta G_C$ representa el cambio de precios en el cupón corriente de GNMA durante el mismo período. Esta variable es un título del mercado bancario, b es una medida de volatilidad. La fundamentación del porqué el uso de este indicador, está en que la duración calculada según Macaulay no es muy cierta cuando existe la posibilidad de prepago de la deuda, como es el caso de los títulos hipotecarios; y la sensibilidad del precio a la tasa de interés no es la manera más adecuada de evaluar la elasticidad del precio frente a cambios en la tasa de interés exclusivamente, ya que se comprueba que el posible prepago de la deuda afecta sensiblemente al precio del título en el mercado.

Christensen y Sorensen (1994) asumen un proceso estocástico de medición de la elasticidad del precio en donde la variable tiempo influye en el cambio de precio y usan el siguiente modelo:

$$dP(r(t),t)/P(r(t),t)=\mu_P(r(t),t)dt+\sigma_P(r(t),t)dw(t) \tag{20}$$

donde:

$$\mu_p = [1/2\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial t}]/P$$

$$\sigma_p = [\sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}]/P$$

en que:

- μ_p = retorno esperado de los activos por unidad de tiempo.
- σ_p = desviación estándar de los retornos por unidad de tiempo.
- μ_r = cambio esperado en la tasa de interés r(t) por unidad de tiempo.
- σ_r = desviación estándar de los cambios en la tasa de interés por unidad de tiempo.

El proceso estocástico para la tasa de interés es descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu_r(r(t), t)\,dt + \sigma_r(r(t), t)\,dw \tag{21}$$

donde:

- $r(t)$ = tasa de interés *spot*, como función del tiempo t.
- dw = variable estocástica distribuída normalmente con media cero y varianza σ_t

Lo que indica la expresión (21) es que la variación en el precio es un proceso estocástico y que es explicado tanto por la tasa de interés r, así como por el tiempo t más una medición del riesgo de esa tasa en función de la desviación estándar de los retornos.

Kopprasck (1985) a partir de la definición de que la duración es un período de tiempo, considera que el plazo del vencimiento de un activo financiero se asemeja a una balanza sin peso, cuya longitud es proporcional al plazo de vencimiento del activo; y que la distancia de su extremo izquierdo, el que se considera como origen, es proporcional a los períodos en que se distribuyen los flujos, y se ubican pesos proporcionales al valor actual de dichos flujos. Haciendo una homologación con el concepto de palanca de la Física se considera finalmente que la duración es un centro de gravedad de los valores actuales de los flujos del bono. Fernández (1999) explica este concepto y establece que la duración es un punto de apoyo y que los pesos a la izquierda se equilibran con los de la derecha.

VI. PRECIO DEL BONO A PARTIR DE LA DURACIÓN

Al descomponer (3) se tiene:

$$dP / P = -D[d(1+k)/(1+k)]$$

entonces el nuevo precio (P') del bono dado un cambio en la tasa de interés debería ser:

$$P' = P_O (1+dP/P) = P_O (1+dP/P) = P_O \ (1- D\ [d\ (1+k)/(1+k)])$$

Así, el precio del bono ante un aumento en la tasa de interés debería caer y viceversa ante una disminución de la tasa de interés el precio debería subir. La razón del porqué el precio debería caer ante un aumento en la tasa de interés se debe a la definición del bono como instrumento financiero de renta fija; así, si aumenta la tasa de interés de mercado por sobre la tasa pactada por el emisor del bono, ningún inversionista se sentirá atraido económicamente a comprar un título que rinde menos que el mercado, entonces de la única forma que ese bono será demandante es si éste es adquirido a un precio menor.

Algebraicamente lo anterior significa que la inversión inicial será menor y con un mismo flujo que entrega el emisor y en el mismo período de vigencia, entonces al calcular la Tasa Interna de Retorno (TIR) del bonista ésta será equivalente a la tasa de mercado. De esta forma se produce un arbitraje sobre ese título, ya que al bajar el precio habrá mayor demanda, hasta el punto en que se iguala la tasa de rentabilidad del bonista con la tasa de mercado.

VII. CALCULO DE DURACION Y SU INTERPRETACION

Suponga que se tiene un bono por $1.000 con un plazo de 5 años, que paga un interés de 3% semestral y donde la amortización del bono se paga el último semestre. La tasa de mercado de los instrumentos de renta fija es 4% semestral. En el Cuadro Nº 1 se muestra el cálculo de la duración del bono.

CUADRO Nº 1
CALCULO DE DURACION

(1) Período(t)	(2) Flujos de Caja (F_t)	(3) $F_t/(1+r)^t$	(4) $F_t/(1+r)^t/V$	(5) (1) x (4)'
1	$30	28,846	0,0314	0,0314
2	$30	27,737	0,0302	0,0604
3	$30	26,670	0,0290	0,0870
4	$30	25,644	0,0279	0,1116
5	$30	24,658	0,0268	0,1340
6	$30	23,709	0,0258	0,1548
7	$30	22,798	0,0248	0,1736
8	$30	21,921	0,0239	0,1912
9	$30	21,078	0,0229	0,2691
10	$1030	695,831	0,7573	7,573
SUMA		V=$918,892	1	8,7861

Fuente: Elaboración propia. Duración: -8,7861

La duración de -8,7861 indica que ante un pequeño aumento de la tasa de interés, entonces el precio debería variar en 8,7861 veces. Ello no indica que el período sea 8,7861, como corrientemente se interpreta. En el Cuadro Nº 2 se presenta la elasticidad para diferentes tasas a partir de una tasa base de referencia de 4%.

CUADRO Nº 2
ELASTICIDAD SEGÚN CAMBIOS DISCRETOS

Valor Bono	Tasa de Mercado	Elasticidad (Cambios discretos)
$918,892	4%	-
$918,121	4,01%	-0,000839/0,00096 = -8,720
$881,309	4,50%	-0,0409 / 0,0048 = -8,507
$845,565	5%	-0,0798 / 0,00961 = -8,206
$779,197	6%	-0,1520 / 0,01923 = -7,904
$614,941	9%	-0,3308 / 0,04807 = -6,881
$397,747	15%	-0,5671 / 0,10576 = -5,362
$165,284	30%	-0,8201 / 0,25 = -3,280

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro Nº 2 se presenta el valor que debería tener el bono del Cuadro Nº 1 de acuerdo a diferentes tasas de mercado. Por ejemplo, el valor de la elasticidad para el caso de que la tasa de interés suba de 4% a 6%, se ha calculado de la siguiente forma: la tasa se incrementa en 1,923%, con respecto a su valor inicial o sea 1,04, entonces el precio del bono debería caer a $779,197, es decir, en -15,2%. En otras palabras, por cada incremento de la tasa de 1%, el precio del bono debe caer en 7,904 veces. Aquí se observa que, mientras mayor sea el incremento en la tasa de interés, menor es el grado de elasticidad. Por otro lado, cuando el in-

$$\frac{dV/V_0}{d(1+k)/(1+k_0)} = \frac{(779,197-918,892)/918,892}{(1,06-1,04)/(1,04)} = \frac{-0,1520}{0,01923} = -7,904$$

cremento es pequeño, por ejemplo de 4% a 4,01%, la elasticidad se acerca a la duración. Este último caso permite apreciar claramente que la duración, como concepto de elasticidad, es válida en un punto y sólo para pequeñas variaciones, que se desprende directamente de los supuestos matemáticos de Cálculo Diferencial ya explicado, pero a medida que el crecimiento de la tasa es mayor, entonces la elasticidad, es decir la duración, se aleja de la forma de cálculo tradicional. Esto, además reafirma que la duración definida como período pierde el verdadero sentido que ella tiene como se explicó en las secciones anteriores.

Si el bono del ejemplo (Cuadro Nº 1) paga amortizaciones anuales, entonces los nuevos valores son los del Cuadro Nº 3.

CUADRO Nº 3
CÁLCULO DURACIÓN

(1) Período	(2) Flujos de Caja (F_t)	(3) $F_t/(1+r)^t$	(4) $F_t(1+r)$ t/v	(1)x(4)
1	60,9	56,30547	0,06095	0,06095
2	60,9	52,0576	0,05635	0,1127
3	60,9	48,13015	0,05210	0,1563
4	60,9	44,4999	0,04817	0,19268
5	1060,9	722,7861	0,78242	3,9121
SUMA		923,77422	1	4,43473

Fuente: Elaboración propia. Duración: -4,43473

En el ejemplo del Cuadro Nº 2 se supone que la tasa de emisión equivalente anual es de 6,09% (equivalente a 3% semestral) y que la tasa de mercado anual es de 8,16% (equivalente a 4% semestral). Así la duración del bono es 4,42473, casi la mitad del bono con capitalización de intereses semestrales.

VIII. CONCLUSIÓN

El objetivo de este artículo ha sido reposicionar el concepto de duración como un dato adimensional en contraposición a lo que se señala en los textos de Finanzas. El análisis teórico del concepto de duración, usando Cálculo Diferencial, indica que éste es más apropiado como una concepción adimensional, es decir, lo que se conoce con el nombre de elasticidad puntual. Se muestra que el concepto duración como equivalente a período de tiempo no es adecuado. Por otro lado, el término duración ha tenido otros trámites, pero mas bien operativo de cálculo, como es el caso del uso de la serie matemática de Taylor o el uso de Cálculo Diferencial Estocástico.

LITERATURA CITADA

BLAIR, R. D. y KENNY, L.U.1983. Microeconomía MCGRAW-HILL, p. 43.

CHRISTENSEN, P. O. y SORENSEN, R.G. 1994. Duration, Convexity, and Time Value. The Journal of Portfolio Management. 20(2)51-60.

COOPER, I. A. 1977. Asset Change Interest-Rate Change and Duration. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 12(5)701-724.

CHAMBERS, D.; CARLETON, W. y MCENALLY, R. 1988. Immunizing Defalt-Free Bons Portfolios with a Duration Vector. Journal of Financial and Quantitative Analysis. 23(1)89-104.

COPELAND, T. E. y WESTON, J.F. 1988. Financial Theory and Corporate Policy. 3rd. Edition. ADDISON-WESLEY P. pp. 489-495.

DEROSA, P.; GOODMAN, L. and ZAZZARINO, M. 1993. Duration Estimates on Mortgage-Backed Securities. The Journal of Portfolio Management. 19(2)32-38.

DUNETZ. M.L. y MAHONEY, S.M. 1988. Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds. Financial Analysts Journal. pp. 53-72.

EDWARDS, F. y Ma, C.W. 1992. Futuros and Options. MC GRAW-HILL. pp. 318-321; pp. 345-348.

ELTON, E.J. y GRUBER, M.J. 1991. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. 4ta. Ed., JOHN WILEY. pp. 562-565.

FERNÁNDEZ, P. 1999. Valoración de Empresas. Editorial Gestión 2000. Barcelona, España. pp. 439-468.

FERREIRA, L.F. y SOARES, A.R. 1999. A duration e um modelo alternativo: um teste empírico. Revista de Administracao de Empresas. Fundación Getulio Vargas, S. Paulo, Brasil. 39(4)60-69.

KREMER, G.H.M.J. 1993. Factor Inmunization, en Stokking, E.J. y Zambruno, G. (Eds.) Recent Research in Financial Modelling. Physica-Verlag, Alemania.

KOPPRASCK, R. 1985. The Analog Presentation of Duration. En Understanding Duration and Volatility. Salomon Brothers, Inc.

LEVENFELD, G. y De la Maza, S. 1997. Matemáticas de las Operaciones Financieras y de la Inversión. McGrawHill, Madrid.

MACAULAY, F.R. 1938. Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rate, Bond Yield and Stock Prices in the U.S. since 1856. New York. Columbia University Press.

MARTÍNEZ, E. 1993. Futuros y Opciones. McGraw-Hill. Serie Mc Graw-Hill de Management. pp. 341-356.

PARADA, R. 1997. El Concepto Duración de un Bono. Alta Dirección, Barcelona, España. 32, (195) 33-40.

PINKUS, S. M. y CHANDOHA, M. 1986. The relative price volatily of mortgage securities. The Journal of Portfolio Management. 12(4)9-22.

SOUSA R.; EZQUIAGA D. I. y Zoido M. J. 1992. La Duración y su Aplicación al Análisis y Gestión de títulos de Renta Fija. Editorial Ariel, España, pp.165-191.

THOMAS, G B. 1968. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. 5ª. Ed. Addison Wesley P.