PAUTA TEST 4

Encuentre la solución general de la siguiente EDO para $x > 0$

$$3x^2y''(x) + 7xy'(x) + y(x) = \operatorname{sen}(\ln(x))$$

Solución: observemos que ésta es una EDO de Euler-Cauchy. Haciendo el cambio de variable $x = e^z$, se obtiene la siguiente EDO no homogénea a coeficientes constantes

$$3\frac{d^2y}{dz^2} + 4\frac{dy}{dz} + y = \operatorname{sen}(z) \quad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

La solución homogénea está dada por

$$y_h(z) = ae^{-z} + be^{-\frac{1}{3}z} \quad \textbf{(1 PUNTO)}$$

con a y b constantes reales. Para encontrar la solución particular, se puede proceder de alguna de las siguientes maneras: **(4.5 PUNTOS)**

Usando Variación de Parámetros: normalizamos primero la EDO: (0.5 PUNTOS)

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{4}{3}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}y(z) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(z)$$

se asume que la solución particular de este problema es tal que

$$y_p(z) = c_1(z)e^{-z} + c_2(z)e^{-\frac{1}{3}z}$$

con $c_1(z)$ y $c_2(z)$ funciones por determinar. Éstas son tales que (0.5 PUNTOS)

$$c_1'(z) = \frac{W_1(z)}{W(z)}, \quad c_2'(z) = \frac{W_2(z)}{W(z)}$$

donde

$$W_1(z) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-z/3} \\ \frac{1}{3}\operatorname{sen}(z) & -\frac{1}{3}e^{-z/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}e^{-z/3}\operatorname{sen}(z) \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

$$W_2(z) = \begin{vmatrix} e^{-z} & 0 \\ -e^{-z} & \frac{1}{3}\operatorname{sen}(z) \end{vmatrix} = \frac{1}{3}e^{-z}\operatorname{sen}(z) \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

$$W(z) = \begin{vmatrix} e^{-z} & e^{-z/3} \\ -e^{-z} & -\frac{1}{3}e^{-z/3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}e^{-4z/3} \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

luego,

$$c_1(z) = \int \frac{W_1(z)}{W(z)}dz = \int -\frac{1}{2}e^{z}\,\text{sen}(z)dz = \frac{1}{4}e^{z}(\cos(z) - \text{sen}(z)) \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

$$c_2(z) = \int \frac{W_2(z)}{W(z)}dz = \int \frac{1}{2}e^{z/3}\,\text{sen}(z)dz = \frac{3}{20}e^{z/3}(\text{sen}(z) - 3\cos(z)) \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

se obtiene entonces

$$y_p(z) = -\frac{1}{10}\,\text{sen}(z) - \frac{1}{5}\cos(z)$$

por tanto, la solución general de la EDO (auxiliar) está dada por (0.5 PUNTOS)

$$y(z) = ae^{-z} + be^{-z/3} - \frac{1}{10}\,\text{sen}(z) - \frac{1}{5}\cos(z)$$

lo que, al retornar a x haciendo $z = \ln(x)$, se concluye que (0.5 PUNTOS)

$$\boxed{y(x) = ax^{-1} + bx^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{10}\,\text{sen}(\ln(x)) - \frac{1}{5}\cos(\ln(x))}$$

Usando el método del aniquilador: para la EDO

$$3\frac{d^2y}{dz^2} + 4\frac{dy}{dz} + y = \text{sen}(z)$$

la reescribimos como

$$(3D_z^2 + 4D_z + 1)y(z) = \text{sen}(z)$$

aplicamos a ambos lados el operador $(D_z^2 + 1)$ para aniquilar al término fuente; se obtiene

$$(D_z^2 + 1)(3D_z^2 + 4D_z + 1)y(z) = 0 \quad \text{(1 PUNTO)}$$

lo que da como solución general

$$y(z) = ae^{-z} + be^{-z/3} + A\cos(z) + B\,\text{sen}(z)$$

con A y B constantes por calcular. Se concluye entonces que la solución particular es de la forma

$$y_p(z) = A\cos(z) + B\,\text{sen}(z) \quad \text{(1 PUNTO)}$$

derivando

$$y_p'(z) = -A\,\text{sen}(z) + B\cos(z)$$

$$y_p''(z) = -A\cos(z) - B\,\mathrm{sen}(z)$$

reemplazando en la EDO,

$$3y_p''(z) + 4y_p'(z) + y_p(z) = (4B - 2A)\cos(z) + (-2B - 4A)\,\mathrm{sen}(z) = \mathrm{sen}(z)$$

lo anterior induce el sistema (1 PUNTO)

$$\begin{cases} 4B - 2A = 0 \\ -2B - 4A = 1 \end{cases}$$

de donde se obtiene $A = -\frac{1}{5}$ y $B = -\frac{1}{10}$. Luego,

$$y_p(z) = -\frac{1}{5}\cos(z) - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(z) \quad \text{(0.5 PUNTOS)}$$

Por tanto, la solución general de la EDO (auxiliar) está dada por (0.5 PUNTOS)

$$y(z) = ae^{-z} + be^{-z/3} - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(z) - \frac{1}{5}\cos(z)$$

lo que, al retornar a x haciendo $z = \ln(x)$, se concluye que (0.5 PUNTOS)

$$\boxed{y(x) = ax^{-1} + bx^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{10}\,\mathrm{sen}(\ln(x)) - \frac{1}{5}\cos(\ln(x))}$$

RVA/rva
15 de Octubre de 2019