PAUTA TEST 3

Resuelva el siguiente PVI

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} + 25\frac{dy}{dx} = x^2 + xe^{-2x}, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = 5$$

Solución: partimos por la solución del problema homogéneo:

$$y''' + 10y'' + 25y' = 0$$

la que corresponde a **(1 PUNTO)**

$$y_h(x) = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para obtener la solución particular $y_p(x)$, procedemos a aplicar el operador $L = D^3(D+2)^2$ a ambos lados de la EDO. Usando la notación de operadores diferenciales, se tiene

$$\begin{aligned} (D^3 + 10D^2 + 25D)y &= x^2 + xe^{-2x} \\ \Longrightarrow D^3(D+2)^2(D^3 + 10D^2 + 25D)y &= 0 \\ \Longleftrightarrow D^4(D+2)^2(D+5)^2y &= 0 \quad \textbf{(1 PUNTO)} \end{aligned}$$

El presente problema auxiliar tiene como solución **(0.5 PUNTOS)**

$$y(x) = k_1 + k_2x + k_3x^2 + k_4x^3 + m_1e^{-2x} + m_2xe^{-2x} + n_1e^{-5x} + n_2xe^{-5x}$$

con $k_1, \ldots, k_4, m_{1,2}, n_{1,2}$ constantes reales por calcular. Observemos que los términos que llevan k_1, n_1 y n_2 son múltiplos escalares de las funciones que generan a la solución homogénea. Dado que estams buscando un conjunto de soluciones que sea linealmente independiente, postulamos como solución particular a **(0.5 PUNTOS)**

$$y_p(x) = k_2x + k_3x^2 + k_4x^3 + m_1e^{-2x} + m_2xe^{-2x}.$$

Procedemos a derivar para poder obtener los valores numéricos de las constantes. Se tiene:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= k_2 + 2k_3x + 3k_4x^2 + (m_2 - 2m_1)e^{-2x} - 2m_2xe^{-2x} \\ y_p''(x) &= 2k_3 + 6k_4x + (4m_1 - 4m_2)e^{-2x} + 4m_2xe^{-2x} \\ y_p'''(x) &= 6k_4 + (12m_2 - 8m_1)e^{-2x} - 8m_2xe^{-2x} \end{aligned}$$

reemplazando estos resultados en la EDO, y comparando con el lado derecho de ésta, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'''(x) + 10y_p''(x) + 25y_p'(x) &= \big(25k_2 + 20k_3 + 6k_4\big) + \big(50k_3 + 60k_4\big)x \\ &\quad + 75k_4x^2 - (18m_1 + 3m_2)e^{-2x} - 18m_2xe^{-2x} \\ &= x^2 + xe^{-2x} \end{aligned}$$

la igualdad anterior motiva el planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 25k_2 + 20k_3 + 6k_4 &= 0 \\ 50k_3 + 60k_4 &= 0 \\ 75k_4 &= 1 \\ -18m_1 - 3m_2 &= 0 \\ -18m_2 &= 1 \end{aligned}$$

así,

$$k_2 = \frac{6}{625},\ k_3 = \frac{-2}{125},\ k_4 = \frac{1}{75},\ m_1 = \frac{1}{108}, m_2 = -\frac{1}{18}$$

luego, la solución particular estará dada por

$$y_p(x) = \frac{6}{625}x - \frac{2}{125}x^2 + \frac{1}{75}x^3 + \frac{1}{108}e^{-2x} - \frac{1}{18}xe^{-2x}$$

y así, tendremos que la solución general estará dada por **(2 PUNTOS)**

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-5x} + c_3xe^{-5x} + \frac{6}{625}x - \frac{2}{125}x^2 + \frac{1}{75}x^3 + \frac{1}{108}e^{-2x} - \frac{1}{18}xe^{-2x}$$

donde faltan calcular las constantes c_1, c_2 y c_3. Para ello, debemos imponer las condiciones iniciales del problema. Derivando, se tiene:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (c_3 - 5c_2)e^{-5x} - 5c_3xe^{-5x} + \frac{6}{625} - \frac{4}{125}x + \frac{3}{75}x^2 - \frac{8}{108}e^{-2x} + \frac{2}{18}xe^{-2x} \\ y''(x) &= (25c_2 - 10c_3)e^{-5x} + 25c_3xe^{-5x} - \frac{4}{125} + \frac{6}{75}x + \frac{28}{108}e^{-2x} - \frac{4}{18}xe^{-2x} \end{aligned}$$

imponiendo las condiciones iniciales **(1 PUNTO)**

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - \frac{1}{108} = 3 \\ y'(0) &= (c_3 - 5c_2) + \frac{6}{625} - \frac{8}{108} = 4 \\ y''(0) &= (25c_2 - 10c_3) - \frac{4}{125} + \frac{28}{108} = 5 \end{aligned}$$

dividiendo la tercera ecuación por 5 y sumando ésta con la segunda ecuación, se obtiene

$$c_3 = \frac{2}{625} - \frac{12}{5\cdot 108} - 5$$

reemplazando en la segunda ecuación,

$$c_2 = \frac{1}{5}\Big(\frac{8}{625} - \frac{52}{5\cdot 108} - \frac{9}{5}\Big)$$

y reemplazando en la primera ecuación

$$c_1 = \frac{1}{5}\Big(\frac{84}{5} - \frac{8}{625} + \frac{77}{5\cdot 108}\Big)$$

se concluye, por tanto, que la solución general del problema estará dada por

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{1}{5}\Big(\frac{84}{5} - \frac{8}{625} + \frac{77}{5\cdot 108}\Big) + \frac{1}{5}\Big(\frac{8}{625} - \frac{52}{5\cdot 108} - \frac{9}{5}\Big)e^{-5x} \qquad \textbf{(1 PUNTO)} \\ & + \Big(\frac{2}{625} - \frac{12}{5\cdot 108} - 5\Big)xe^{-5x} + \frac{6}{625}x - \frac{2}{125}x^2 + \frac{1}{75}x^3 + \frac{1}{108}e^{-2x} - \frac{1}{18}xe^{-2x} \end{aligned}$$

La nota $N(p)$ se asignará en función de la expresión $N(p) = 1 + p$, con p el número de puntos ganados por el estudiante. Si $N(p) > 7$, entonces $N(t) = 7$.

RVA/rva

1 de Octubre de 2019