PAUTA TEST 2

Problema 1. Considere la forma diferencial

$$(16xy^2 - 6y^4)dx + (12x^2y - 10xy^3)dy = 0$$

1. Verifique que ella no es exacta.
2. Encuentre los valores de r y s de modo que la función $\mu(x,y) = x^r y^s$ sea un factor integrante (FI) idóneo. Una vez encontrados, use dicho FI para resolver la ecuación.

Solución parte 1: a partir de la ecuación entregada en el enunciado, identificamos las funciones $M = M(x,y)$ y $N = N(x,y)$:

$$M(x,y) = 16xy^2 - 6y^4, \qquad N(x,y) = 12x^2y - 10xy^3$$

derivando,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 32xy - 24y^3, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 24xy - 10y^3$$

observemos que el criterio de exactitud no es satisfecho por las funciones M y N. Luego, la Forma Diferencial (FD) dada **no es exacta**. (2 PUNTOS).

Solución parte 2: notemos que el enunciado nos indica que la función $\mu = \mu(x,y) = x^r y^s$ podría ser el factor integrante adecuado para forzar la exactitud de la ecuación. Multiplicando por μ a ambos lados,

$$(16x^{r+1}y^{s+2} - 6x^r y^{s+4})dx + (12x^{r+2}y^{s+1} - 10x^{r+1}y^{s+3})dy = 0$$

en este punto, definiremos unas nuevas funciones $\tilde{M} = \tilde{M}(x,y)$ y $\tilde{N} = \tilde{N}(x,y)$ como sigue:

$$\tilde{M}(x,y) = 16x^{r+1}y^{s+2} - 6x^r y^{s+4}, \qquad \tilde{N}(x,y) = 12x^{r+2}y^{s+1} - 10x^{r+1}y^{s+3}$$

asumiendo entonces que esta nueva FD es exacta, se tiene que cumplir entonces que

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}$$

donde

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 16(s+2)x^{r+1}y^{s+1} - 6(s+4)x^r y^{s+3} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 12(r+2)x^{r+1}y^{s+1} - 10(r+1)x^r y^{s+3} \tag{2}$$

comparando (1) con (2) término a término, se obtiene

$$16(s+2) = 12(r+2), \qquad 6(s+4) = 10(r+1)$$

de donde se induce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4s - 3r = -2 \\ 5r - 3s = 7 \end{cases}$$

de donde se deduce que $s = 1$ y $r = 2$. Por lo tanto, el FI buscado queda de la forma

$$\mu(x,y) = x^2 y$$

y la FD queda (2 PUNTOS)

$$(16x^3y^3 - 6x^2y^5)dx + (12x^4y^2 - 10x^3y^4)dy = 0 \tag{3}$$

y las funciones $\tilde{M}$ y $\tilde{N}$ quedan

$$\tilde{M}(x,y) = 16x^3y^3 - 6x^2y^5, \qquad \tilde{N}(x,y) = 12x^4y^2 - 10x^3y^4.$$

Dado que la FD (3) es exacta, se deduce la existencia de una función $f(x,y) = c$, para algún real c, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tilde{M}(x,y) \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}(x,y) \tag{5}$$

empezando con la expresión (4), la integramos a ambos lados con respecto a x para obtener

$$f(x,y) = 4x^4y^3 - 2x^3y^5 + g(y) \tag{6}$$

donde $g(y)$ es una función que debemos hallar usando (5): derivamos (6) con respecto a y para escribir

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^4y^2 - 10x^3y^4 + g'(y) \tag{7}$$

al igualar (5) con (7) para el $\tilde{N}$ definido con anterioridad, se llega a que (1 PUNTO)

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

se concluye entonces que la solución de la ecuación está dada de forma implícita por la expresión

$$\boxed{4x^4y^3 - 2x^3y^5 = C}$$

donde $C = c - k \in \mathbb{R}$. (1 PUNTO)

Problema 2. Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era de 20^oC, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90^oC si se sabe que su temperatura aumentó 2^oC en un segundo? ¿Cuánto tiempo le llevará alcanzar los 98^oC?

Solución: se hace útil denotar por $T = T(t)$ a la función que describe la temperatura de la barra durante el instante de tiempo t. Del enunciado, y omitiendo por simplicidad las unidades de medida respectivas, se logra extraer la siguiente información: (0.5 PUNTOS)

$$T(0) = 20, \qquad T(1) = 22.$$

La Ley de Newton nos dice que la función temperatura será solución del siguiente PVI (0.5 PUNTOS)

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_a) \\ T(0) = 20 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es la constante de proporcionalidad; mientras que del enunciado, se tiene que $T_a = 100$ pues el agua se encuentra hirviendo. Notemos que la EDO admite a la función $T \equiv 100$ como solución trivial. Dado que la temperatura sube desde los 20^oC, se hace razonable asumir que cuando $t > 0$, la función temperatura T será tal que $T \in (20, 100)$.

Para terminar de plantear el problema, nos falta saber el valor de la constante k. Procederemos a encontrarla separando variables en la EDO y luego integrando entre $t = 0$ y $t = 1$. Recordando que $T(0) = 20$ y que $T(1) = 22$, y que $T \in (20, 100)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{T=20}^{T=22} \frac{1}{T - 100} dT &= \int_{t=0}^{t=1} k dt \\ \ln |T - 100| \Big|_{T=20}^{T=22} &= kt \Big|_{t=0}^{t=1} \\ \ln |-78| - \ln |-80| &= k \\ \ln \left(\frac{78}{80} \right) &= k \end{aligned}$$

así, después de simplificar, se deduce el valor de la constante k (1 PUNTO)

$$k = \ln\left(\frac{39}{40}\right).$$

Luego, el PVI a plantear y resolver estará dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = \ln\left(\frac{39}{40}\right)(T - 100) \\ T(0) = 20 \end{cases}$$

análogo a lo hecho para encontrar k, separamos variables en la EDO para T e integramos entre 0 y $t \in \mathbb{R}$. Al hacer el respectivo cambio de variables, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{20}^{T(t)} \frac{1}{w - 100} dw &= \int_0^t \ln\left(\frac{39}{40}\right) ds \\ \ln|w - 100|\Big|_{w=20}^{w=T(t)} &= \ln\left(\frac{39}{40}\right)\Big|_{s=0}^{s=t} \\ \ln|T(t) - 100| - \ln|-80| &= t \ln\left(\frac{39}{40}\right) \\ \ln(100 - T(t)) - \ln(80) &= t \ln\left(\frac{39}{40}\right) \\ \ln\left(\frac{100 - T(t)}{80}\right) &= \ln\left(\frac{39}{40}\right)^t \\ \frac{100 - T(t)}{80} &= \left(\frac{39}{40}\right)^t \end{aligned}$$

así, y después de reordenar términos, se concluye que (2 PUNTOS)

$$T(t) = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^t \tag{8}$$

que corresponde a la función que describe a la temperatura de la barra en el instante de tiempo t. Luego,

1. Para que la barra alcance los $90^{\circ}C$, se debe cumplir que

$$T(t) = 90 = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^t$$

que es equivalente a tener

$$\left(\frac{39}{40}\right)^t = \frac{1}{8} = 8^{-1}$$

dado el ocho del lado derecho, aplicamos $\log_8$ a ambos lados[1]:

$$\log_8\left(\frac{39}{40}\right)^t = \log_8(8^{-1})$$

[1] También se puede aplicar logaritmo natural a ambos lados. Se llegará al mismo resultado escrito en esta pauta.

luego,

$$t = \frac{-1}{\log_8(39/40)} = \frac{1}{\log_8(40/39)}$$

y usando la propiedad de cambio de base del logaritmo, se concluye que para que la barra alcance los 90^oC deben pasar

$$\boxed{t = \frac{\ln(8)}{\ln(40/39)}[s]}$$

que corresponden a unos 82.13 $[s]$ aproximadamente. (1 PUNTO)

2. Para que la barra alcance los 98^oC, procederemos a repetir el ejercicio anterior pero para $T(t) = 98$. Se tiene

$$T(t) = 98 = 100 - 80\left(\frac{39}{40}\right)^t$$

que es equivalente a tener

$$\left(\frac{39}{40}\right)^t = \frac{1}{40}$$

aplicando $\log_{40}$ a ambos lados y despejando para t, se concluye que para que la barra alcance los 98^oC deben pasar

$$\boxed{t = \frac{1}{1 - \log_{40}(39)}[s]}$$

que corresponden a 145.703 $[s]$ aproximadamente. (1 PUNTO)

Observación: aquellos que opten por usar integrales indefinidas, la solución del PVI estará dada por

$$T(t) = 100 - Ce^{kt}$$

donde, al aplicar las condiciones $T(0)$ y $T(1)$, debieran llegar a que $k = \ln(39/40)$ y $C = 80$. Dicha expresión es equivalente a la escrita en (8).

La nota $N(p)$ se asignará en función de la expresión $N(p) = 1+p$, con p el número de puntos ganados por el estudiante.

RVA/rva

3 de Septiembre de 2019