UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Ecuaciones Diferenciales - 220135
Semestre II, 2019

PAUTA TEST 1

Cada problema consta de 6 puntos.

Problema 1: considere los siguientes PVI

$$P_1 : \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad P_2 : \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

de ser posible, resuelva ambos dentro de una región R donde se garantice la existencia y unicidad de soluciones. Justifique sus conclusiones.

Solución: consideremos la EDO involucrada en ambos problemas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{y}}.$$

Gracias a la presencia de la raíz cuadrada en el denominador, el lado derecho de la EDO no está definido para $y \leq 0$. Por otro lado, al derivar el lado derecho con respecto a y, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = -\frac{x}{y^{3/2}}$$

lo que, nuevamente, se indefine cuando $y \leq 0$. Luego, y de los teoremas de existencia y unicidad vistos en clase, se garantiza que un PVI definido por la presente EDO, admitirá una única solución $y(x)$ definida dentro de un rectángulo R que contenga a la condición inicial; es decir, para $(x_0, y_0) \in R \subset (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

Sin embargo, la condición inicial del problema P_1, dada por $(x_0, y_0) = (0, -1)$, no cumple con el requisito mencionado. Así, no podemos garantizar si quiera la existencia de soluciones. De lo acordado en clase, se concluye que el problema P_1 no puede ser resuelto. (2 PUNTOS)

Notemos que el PVI P_2 sí está bien definido, pues su condición inicial está en una zona donde queda garantizada la existencia y unicidad de soluciones. Por otro lado, la EDO involucrada es separable. Re-ordenando, integrando entre 0 y $x \in (-\infty, \infty)$, y aplicando el respectivo cambio de variable (3 PUNTOS)

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{y(t)}\frac{dy}{dt}dt &= \int_0^x t dt \\
\Leftrightarrow \frac{2}{3}\big(y(t)\big)^{\frac{3}{2}}\bigg|_{t=0}^{t=x} &= \frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=x} \\
\Leftrightarrow \frac{2}{3}\big(y(x)\big)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} &= \frac{x^2}{2} \\
\Leftrightarrow \big(y(x)\big)^{\frac{3}{2}} &= \frac{3x^2}{4} + 1.
\end{aligned}$$

Dado que estamos trabajando con $y > 0$, se concluye que la solución del PVI está dada por (1 PUNTO)

$$\boxed{y(x) = \left(\frac{3x^2}{4} + 1\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in (-\infty, \infty)}$$

OBSERVACIÓN: el estudiante que opte por usar una integral indefinida para resolver, se encontrará sujeto a un descuento de 1 punto en caso de errar en el cálculo de la constante de integración.

Problema 2: calcule la solución general de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}, \quad x > 0$$

indicando, además, el conjunto de valores de x donde esta solución es válida.

Solución: re-escribiendo la EDO, se observa que ésta es del tipo Bernoulli con $n = 2$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2},$$

se propone el cambio de variable $v(x) = y^{1-n}(x) = y^{-1}(x)$ (1 PUNTO). Por regla de la cadena, se obtiene (0.5 PUNTOS)

$$-y^2\frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Reemplazando en la EDO,

$$-y^2\frac{dv}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2},$$

observemos que $y/x = y^2/(xy)$. Luego,

$$y^2\frac{dv}{dx} = -\frac{y^2}{xy} + \frac{y^2}{x^2}$$

y debido a la definición del cambio de variable $v(x)$, lo anterior queda

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} + \frac{1}{x^2},$$

reordenando, se llega a la siguiente EDO lineal (1 PUNTO)

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}.$$

Después de hacer los cálculos correspondientes, el Factor Integrante (FI) necesario para resolver la EDO está dado por

$$\mu(x) = \exp(\ln|x|) = |x|$$

y dado que $x > 0$, se tiene que $\mu(x) = x$. Multiplicando la EDO por el FI, y debido a sus propiedades vistas en clase, la EDO queda (1 PUNTO)

$$\frac{d}{dx}\big(xv(x)\big) = \frac{1}{x}.$$

Integrando a ambos lados,

$$xv(x) = \ln(x) + C$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante de integración. Luego, (1 PUNTO)

$$v(x) = \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = \frac{C + \ln(x)}{x}.$$

Regresando entonces a $y(x)$ desde $v(x)$, y reordenando términos, se concluye que la solución de la EDO está dada por (1 PUNTO)

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{C + \ln(x)}}$$

donde se observa que la solución está definida para $x \in (0, \infty) : x \neq e^{-C}$ debido a la presencia de la constante C y la función $\ln(x)$, ambos en el denominador. (0.5 PUNTOS)

La nota $N(p)$ se asignará en función de la expresión $N(p) = 1 + p$, con p el número de puntos ganados por el estudiante.

RVA/rva
27 de Agosto de 2019