LISTADO 4: EDO DE ORDEN SUPERIOR, PARTE 1

1. Calcule:

   (a) $(D^3 - D^2 + D)(e^{3x})$

   (b) $(D^2 - D)(e^{3x} + 3x^3)$

   (c) $(5D^2 - 2D - 3)(\cos(x))$

   (d) $(D + 2)(xD - x)(e^{5x} + \operatorname{sen}(x))$

2. Para las EDOs escritas en forma de operadores, re-escríbalas en forma tradicional

   (a) $(D + 1)(xD - x)(y) = 0$

   (b) $(xD + 1)(D - x)(y) = 0$

3. Para el operador diferencial lineal L definido por

$$L := (x + |x|)D^2 - x^3 D - 4x$$

   determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ donde el operador L es de orden 2, y en donde L es de orden 1.

4. Factorice cada uno de los siguientes operadores diferenciales lineales L en un producto de factores irreducibles de orden menor:

   (a) $L = D^2 - 3D + 2$

   (b) $L = D^3 - 3D^2 + 4$

   (c) $L = 4D^4 + 4D^3 - 7D^2 + D - 2$

   (d) $L = D^4 + 1$

   (e) $L = 2D^2 + 5D + 2$

   (f) $L = D^4 - 1$

   (g) $L = D^5 - 1$

   (h) $L = D^2 - 5D + 9$

   Indicación: puede apoyarse usando el Teorema de las Raíces Racionales y el Método de Ruffini, vistos en cursos anteriores.

5. Sea $L := (D - a)$, con a una constante real cualquiera. Pruebe que $xe^{ax} \in \operatorname{Ker}(L^2)$. Demuestre además que $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ es una base para el espacio vectorial $\operatorname{Ker}(L^2)$. Pruebe que para $m \in \mathbb{N}, x^{m-1}e^{ax} \in \operatorname{Ker}(L^m)$.

   Indicación: para la última parte, use inducción.

6. (a) Pruebe que la EDO dada por $(D - x)(xD - 2)y = 0$ corresponde a

$$xy'' - (1 + x^2)y' + 2xy = 0$$

(b) Pruebe que $(D-x)(xD_2)y \neq (xD-2)(D-x)y$

(c) Pruebe que $y_1(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$, es solución de la EDO $(xD-2)y = 0$, pero no es solución de la EDO $(xD-2)(D-x)y = 0$.

(d) Pruebe que $y_2(x) = be^{\frac{x^2}{2}}$, con $b \in \mathbb{R}$, es solución de la EDO $(D-x)y = 0$, pero no es solución de la EDO $(D-x)(xD-2)y = 0$

(e) Pruebe que $(D-x)(xD-2)y_1 = 0$

(f) ¿Qué concluye del proceso anterior?

7. Resuelva la EDO $L(y) = 0$, sabiendo que

   (a) $L = (D+6)(D-2)(D+3)(D-2)$

   (b) $L = D^4 + 2D^3 - 3D^2 + 4$, y sabiendo que $(D+2)$ y $(D-1)$ son *factores* del operador L.

   (c) $L = D^3 - 3D^2 + 4$, y sabiendo que $e^{-x} \in \mathrm{Ker}(L)$

   (d) $L = D^3 - 7D + 6$, y sabiendo que $e^{2x} \in \mathrm{Ker}(L)$

   (e) $L = D^3 - 7D + 6$

8. Sea L un operador diferencial lineal a coeficientes constantes. Muestre que si $y \in \mathrm{Ker}(L)$, entonces para $x_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera, la función definida por $z(x) = y(x-x_0)$ es tal que $z \in \mathrm{Ker}(L)$. Aplique dicho resultado para resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(1) = 2,\ y'(1) = -2 \end{cases}$$

   Para ello, resuelva en su lugar el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2 \end{cases}$$

9. Resuelva los siguientes PVI:

   (a) $y'' - 2y' - 2y = 0, \qquad y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 0$

   (b) $y'' - 4y = 0, \qquad y(3) = 3,\ y'(3) = 2$

   (c) $y^{(4)} - 16y = 0, \qquad y(1) = y'(1) = 0,\ y''(1) = 1,\ y'''(1) = 0$

10. Sea L un operador diferencial lineal de orden n a coeficientes constantes. Determine una solución de la EDO $L(y) = 0$ si se sabe que $L(x + e^x) = \mathrm{sen}(x)$ y que $L(e^{3x}) = 7\cos(x)$.

11. Sea L un operador diferencial lineal de orden n. Calcule la función $y_p(x)$ tal que $L(y_p) = x^3 + \operatorname{sen}(x)$, sabiendo que $L(e^x) = 5\operatorname{sen}(x)$, y que $L(\cos(x)) = \frac{1}{4}x^3$.

12. Calcule la solución de la EDO $L(y) = \sqrt{2} + \pi e^{2x}$, sabiendo que $L = D^2 - 2D + 1$, $L(e^{2x}) = e^{2x}$, $L(1) = 1$, y que $\operatorname{Ker}(L) = \langle \{e^x, xe^x\} \rangle$

13. Calcule una solución particular de la EDO $L(y) = x^6 - 2\operatorname{sen}(x)$ si se sabe que $L(e^x) = 5\operatorname{sen}(x)$ y que $L(\cos(x)) = \frac{1}{4}x^6$.

14. Calcule una solución particular de la EDO a coeficientes constantes $L(y) = xe^x + e^x + xe^{x^2}$ sabiendo que $L(\cos(x)) = xe^x$ y que $L(\ln(x)) = e^x$.

15. Resuelva el siguiente PVI

$$y'' + y = \operatorname{sen}(2x) + \cos(2x), \qquad y(\pi/3) = 1,\ y'(\pi/2) = 0$$

sabiendo que:

- $y_{p1}(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(2x)$ es una solución particular del problema

$$y'' + y = \operatorname{sen}(2x)$$

- $y_{p2}(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x)$ es una solución particular del problema

$$y'' + y = \cos(2x)$$

- $\operatorname{Ker}(D^2 + 1) = \langle \{\cos(x - \frac{\pi}{3}), \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})\} \rangle$

16. Use el principio de superposición de soluciones para calcular la solución general de los siguientes problemas:

   (a) $y'' + 9y = e^{-2x}\cos(3x) + e^{3x}\operatorname{sen}(3x)$

   (b) $y'' - 2y' + 8y = x + \cos(4x) + e^{3x}\operatorname{sen}(3x)$

17. Resuelva los siguientes PVI:

   (a) $y'' + 9y = x^3 + 6, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

   (b) $y'' + 9y = x^3 + 6, \qquad y(\sqrt{2}) = 1,\ y'(\sqrt{2}) = 2$

   (c) $y''' - 4y'' + 3y' - y = x^2, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = y''(0) = 0$

   (d) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2, \qquad y(\frac{3}{10}) = 1,\ y'(\frac{3}{10}) = y''(\frac{3}{10}) = 0$

RVA/rva
17 de Septiembre de 2019