LISTADO 3: EDO DE PRIMER ORDEN, PARTE 2

Ejercicios a resolver en clase

1. En un determinado pueblo, la cantidad $N(t)$ de personas expuestas a una publicidad en particular está regida por la llama *ecuación logística*:

$$\frac{d}{dt}N(t) = N(t)\big(a - bN(t)\big), \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

donde $t \geq 0$ se mide en días. La cantidad a se conoce como *tasa de crecimiento*; mientras que a a/b se le denomina *capacidad de persistencia*, y se define de la siguiente forma

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b}$$

Inicialmente se tiene que $N(0) = 500$, y se observa que $N(1) = 1000$. Determine $N(t)$ si se estima que el pueblo donde se emplaza la publicidad no sobrepasa los 50000 habitantes.

2. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3 %. Si la razón de decaimiento, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente al tiempo t, determine la cantidad que queda después de 24 horas.

3. Considere un circuito compuesto de una resistencia R y un inductor L conectados en serie. La Ley de Kirchhoff que describe la corriente $i = i(t)$ que pasa por el circuito en un tiempo $t > 0$ está está dada por

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

donde $E(t)$ es el voltaje aplicado al circuito. Considere un circuito sometido a una batería que entrega $30[V]$ de manera constante, compuesto de una resistencia de $50\,[\Omega]$ y un inductor de $0.1\,[H]$. Determine la corriente $i(t)$, considerando que el circuito inició desconectado ($i(0) = 0$). Determine la corriente del circuito cuando $t \to \infty$.

4. Dos grandes recipientes A y B del mismo tamaño se llenan con diferentes líquidos. Estos líquidos se mantienen a $0°C$ y $100°C$, respectivamente. Una pequeña

barra de metal con temperatura inicial de 100^oC se introduce en el recipiente A. Después de un minuto, la temperatura de la barra es de 90^oC; luego de 2 minutos la barra se saca y al instante se transfiere al otro recipiente. Pasado un minuto en el recipiente B, la temperatura de la barra se eleva en 10^oC ¿Cuánto tiempo, desde el inicio de todo el proceso, le llevará a la barra alcanzar los 99.9^oC? ¿Si la pequeña barra sólo se introduce en el recipiente B, ¿Cuál es su temperatura al retirarla a los 5 minutos?

5. Encuentre las trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y que, además, tienen su centro sobre el eje OY. Bosqueje la situación.

6. En un estanque vacío de 500 $[L]$ de capacidad se vierte agua de mar con un flujo de 25 $\left[\frac{L}{min}\right]$. Mientras el agua ingresa al depósito, un calentador mantiene el interior del estanque a una alta temperatura. Al llenarse el estanque, se abre una válvula de escape que se mantiene abierta hasta finalizado el proceso; dicha válvula permite la salida de agua pura en estado gaseoso a un flujo de 10 $\left[\frac{L}{min}\right]$.

   Por otro lado, para aumentar la cantidad de sal resultante del proceso, desde el instante de llenado el estanque cierra el ingreso de agua de mar, y en su lugar ingresa agua salada con una concentración de 0.4 $\left[\frac{kg}{L}\right]$ a un flujo de 1 $\left[\frac{L}{min}\right]$, mientras se abre una nueva llave de paso que deja salir $1[L]$ de mezcla por minuto al exterior. El proceso concluye cuando quedan exactamente 70 $[L]$ de mezcla al interior del estanque. Considere que el agua de mar tiene una concentración de 3 $[kg]$ de sal por cada 100 $[L]$, y dentro del estanque suponga homogeneidad de la mezcla en todo momento.

   Hasta el instante en que el proceso concluye, determine:

   a) El volumen de agua en el interior del estanque.

   b) La cantidad de sal en el estanque.

Ejercicios propuestos para el estudiante.

1. La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

2. Considere un circuito compuesto por una fuente externa de energía $E(t)$, una resistencia R, y un capacitor C. La segunda Ley de Kirchhoff nos dice que la

carga $q = q(t)$ del capacitor cumple con la siguiente EDO

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Considere un circuito compuesto por una fuente electromotriz $E(t) = 10\,\text{sen}(2t)[V]$, una resistencia de 200 $[\Omega]$, y un capacitor de 10^{-4} $[F]$. Determine la carga $q(t)$ del capacitor, asumiendo que $q(0) = 0$.

3. Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era de 20^oC, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90^oC si se sabe que su temperatura aumentó 2^oC en un segundo? ¿Cuánto tiempo le llevará alcanzar los 98^oC?

4. Si se pesca un número constante h de peces de una pesquería por unidad de tiempo, entonces un modelo para la población $P = P(t)$ de una pesquería al tiempo t está dado por

$$\frac{dP}{dt} = P(a-b)P - h, \quad P(0) = P_0$$

donde P_0 es la cantidad inicial de peces, mientras que a, b y h son constantes positivas. Considere $a = 5$, $b = 1$, $h = \frac{25}{4}$, y $P_0 = 10000$. ¿Desaparecerá la población de peces en un tiempo finito? De ser así, calcule ese tiempo.

5. Se desconoce la tasa de crecimiento de cierta especie de bacterias, pero se supone que es constante. Al comenzar el experimento, se estimó que había alrededor de 1500 bacterias y una hora después hay 2000 ¿Cuál sería su predicción sobre el número de bacterias que habrá en 4 horas de iniciado el experimento?

6. Un lago con buena circulación contiene 1000 $[kL]$ de agua contaminada a una concentración de 2 $[kg/kL]$. Agua del desagüe de una fábrica entra al lago a una tasa de 5 $[kL/h]$ con una concentración de 7 $[kg/kL]$ de contaminante. El agua fluye por una tubería de salida a una tasa de 2 $[kL/h]$. Determine la cantidad y la concentración de contaminante como una función del tiempo.

7. Cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c_1) = 0$ intersecan ortogonalmente todas las curvas de otra familia $H(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son **trayectorias ortogonales** entre sí. Si $dy/dx = f(x, y)$ es la ecuación diferencial de una familia, entonces la ecuación diferencial para las tratectorias ortogonales de esta familia está dada por $dy/dx = -1/f(x, y)$.

   Para las siguientes familias de curvas, encuentre su respectiva ecuación diferencial asociada y sus respectivas trayectorias ortogonales:

a) $y = -x - 1 + c_1 e^x$ *b*) $y = \dfrac{1}{x + c_1}$ *c*) $x = c_1 y^2$

8. El siguiente problema le ayudará a vislumbrar la influencia que tiene la resistencia del aire al movimiento de un proyectil. Suponga que una bala de cañón de 1 $[kg]$ de masa se dispara verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial dada.

   a) Despreciando la resistencia del aire, y haciendo $m = 1$, la EDO que modela el movimiento rectilíneo vertical de la bala está dada por

   $$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -g$$

   donde $g = 9.8\ [m/s^2]$ es la aceleración de gravedad, y $t > 0$ es el tiempo de vuelo. Infelizmente, ésta es una EDO de orden 2. Podemos ayudarnos recordando que la rapidez de la bala está dada por

   $$v(t) = \frac{d}{dt}y(t) \tag{1}$$

   Así, se obtiene la siguiente EDO de primer orden para $v(t)$:

   $$\frac{d}{dt}v(t) = -g$$

   Calcule la función $v(t)$ para $t > 0$, asumiendo que la bala se disparó hacia arriba con una rapidez inicial de 10 $[m/s]$.

   b) Usando la función $v(t)$ obtenida en el inciso anterior, obtenga la función $y(t)$ que describe la altura de la bala, asumiendo que ésta fue lanzada desde el suelo. Use dicha función, en conjunto con la rapidez $v(t)$, para determinar la altura máxima que alcanza la bala. (INDICACIÓN: use la EDO (1), y asuma que el suelo tiene altura $y = 0$.)

   c) Considere ahora la resistencia del aire. Suponga que ésta es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez de la bala; o sea,

   $$\frac{F_R}{v^2(t)} = k$$

   donde F_R es el módulo de la fuerza de roce del aire. Para este ejercicio, asuma $k = 1.5\ [kg/m]$. Así, la EDO que modela la rapidez $v = v(t)$ de la bala está dada por

   $$\frac{dv}{dt} + kv^2 = -g$$

   Repita los incisos anteriores pero para la presente EDO, y encuentre la altura máxima que alcanza la bala. ¿Qué concluye?

RVA/rva
27 de Agosto de 2019