LISTADO 2: EDO DE PRIMER ORDEN, PARTE 1

1. Resuelva los siguientes PVI. Defina explícitamente la solución y sobre qué intervalo ella lo es:

   a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y^2 x \cos(x^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} y' = y \tan(x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (1+y)^{3/2}\sqrt{x^4 - 1} \\ y(2) = -1 \end{cases}$

2. Resuelva la ecuación
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$$
Indique, además, las regiones donde la solución de la EDO es válida.

3. Para resolver ecuaciones del tipo $y' = f(ax + by + c)$, con a, b y c constantes reales; primero haga el cambio de variable $z(x) = ax + by + c$, y luego resuelva usando el método de separación de variables. Con esto, resuelva $y' = (x + y)^2$.

4. Resuelva las siguientes EDO usando el método de variables separables, identificando a su vez las regiones de validez de las soluciones:

   a) $y' = e^{3x+2y}$

   b) $y' + 2y^2 = 0$

   c) $\operatorname{sen}(3x)dx + 2y\cos^3(3x)dx = 0$

   d) $yx^2 \ln(x)x' = (1 + y)^2$

   e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

5. Usando el Principio de Superposición de Soluciones cuando corresponda, resuelva:

   a) $xy'(x) + (1 + x)y = 0$

   b) $xy'(x) + (1 + x)y = e^{-x}\operatorname{sen}(2x)$

   c) $xy'(x) + (1 + x)y = e^{-x}\operatorname{sen}(2x) + e^{x}\cos(x)$

6. Resuelva el siguiente PVI para un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ adecuado:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 2$$

(AYUDA: observe que si la solución $y = y(x)$ fuese contínua $\forall x \geq 0$, entonces dejaría de ser derivable en un punto particular, dado el planteamiento de la EDO. ¿Para qué valor de x tendremos problemas? Una vez identifique dicho valor, divida el problema en dos y resuélvalos planteando los PVI adecuados, y resolviendo en el orden adecuado.)

(AYUDA 2: si los problemas aún persisten, vaya al Ejemplo 6 de la página 57 del Zill.)

7. Inspirándose en el ejercicio anterior, resuelva el siguiente PVI construyendo una solución continua sobre su intervalo de definición $I \subset \mathbb{R}$, y que sea derivable $\forall x \in I$ salvo en un solo punto al interior de I:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 2$$

8. Una EDO de Bernoulli es toda aquella que se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R}.$$

Donde $P(x)$ y $f(x)$ funciones dependientes de x que varían según el problema a enfrentar. La substitución $u = y^{1-n}$ transorma la EDO de Bernoulli en una EDO lineal que se puede resolver usando lo visto en clase.

Use el método recién mencionado para resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{3x} + y^4 \ln(x), \quad x > 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Para ello, primero debe escribir la EDO de manera tal que quede como una EDO de Bernoulli, luego hacer el cambio de variable; y finalmente, resolver. Indique, además, la región del plano donde la solución es válida. (INDICACIÓN: puede encontrar un problema similar resuelto en el Ejemplo 2 de la página 70 del Zill.)

9. Considere la siguiente ecuación de Bernoulli

$$y'(x) = \frac{1 - y^2(x)}{2xy(x)}$$

Encuentre la curva solución que pase por el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Encuentre el intervalo donde se garantiza la existencia y unicidad de soluciones del problema. Repita el proceso, pero para $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

10. Observe que la EDO del ejercicio anterior también es separable. Use el método de variables separables para resolver. ¿Cuál método es más fácil, a su juicio?

11. Resuelva el siguiente PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - y^2}{x^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Indique, además, la región donde la solución está definida.

12. Una EDO de Riccati es toda aquella que se escribe de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2.$$

Considere la siguiente EDO:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1 - y^2).$$

Observe que es de Riccati. Para resolverla primero debe identificar, por inspección, al menos una solución de la EDO. Para esa solución, la que se denotará por y_c, se define $z(x) := y_c(x) + y(x)$. Usando esta substitución, encuentre la EDO de Bernoulli asociada para $z(x)$. Encuentre además la trayectoria que pasa por el punto $(x_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$ y que satisface la EDO. ¿Qué sucede si $(x_0, y_0) = (1, 2)$? ¿Y si $(x_0, y_0) = (1, -2)$? (INDICACIÓN: puede encontrar más detalles en el Problema 35 de la página 72 del Zill.)

13. Considere la forma diferencial $(3x^2y + e^y)dx + (x^3 + xe^y - 2y)dy = 0$. ¿Es ésta forma exacta? Si lo es, resuelva.

14. Considere la forma diferencial $(xy + x^2y + y^3)dx + (x^2 + 2y^2)dy = 0$.

    a) Verifique que la forma dada no es exacta.

    b) Para resolver, multiplique dicha forma diferencial por el factor integrante $\mu(x, y) = ye^{2x}$. ¿Queda exacta la nueva forma diferencial? Si queda, resuelva.

15. Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la forma diferencial siguiente sea exacta:

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0.$$

Una vez determinado el valor de k, resuelva.

16. Use el método más ventajoso para resolver los siguientes PVI:

   a) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0, \quad y(1) = 2$

   b) $(2x \operatorname{sen}(y))dx + (x^2 + 1)\cos(y)dy = 0, \quad y(1) = \pi$

17. Se dice que una función $H = H(x, y)$ es **homogénea de grado** n si, $\forall t \in S \subset \mathbb{R}$, $H(tx, ty) = t^n H(x, y)$, con $n \in \mathbb{R}$. Si en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ las funciones M y N son homogéneas de igual grado, entonces se dice que la EDO es Homogénea, o que es a coeficientes homogéneos. Se puede definir el cambio de variable $y(x) = xv(x)$, llegando así a una EDO de variable separable. Aplique dicho cambio de variable y resuelva:

   a) $y(\ln(y) - \ln(x) + 1)dx - xdy = 0$ *b*) $(2y^2 + 4x^2)dx - xydy = 0$

18. Considere la ecuación a coeficientes homogéneos

$$\big(x^2 - 2xy\big)y'(x) = xy.$$

   Encuentre la curva solución que pase por el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Encuentre el intervalo donde se garantiza la existencia y unicidad de soluciones, de ser posible.

19. Resuelva las siguientes EDO sobre $R = (0, \infty) \times (0, \infty)$:

   a) $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$

   b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$

   c) $y'(x) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

   d) $(x + y + 1)e^x dx + (e^x + e^y)dy = 0$

   e) $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2} dy = 0$

   f) $x^4 \ln(x) - 2xy^3(x) + 3x^2y^2(x)y'(x) = 0$

   g) $y'(x) - \dfrac{2}{x}y(x) = xy^5(x)$

   h) $y'(x) + y(x) = y^2(x)\big(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)$

   i) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0, \quad y(0) = 1$

   j) $y'(x) = \operatorname{sen}(y(x) + 2x - 2), \quad y(1) = 1.$

RVA/rva
20 de Agosto de 2019