PAUTA EVALUACIÓN 3

Problema 1. Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la forma diferencial siguiente sea exacta

$$(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$$

Una vez determinado dicho k, resuelva.

Solución: sean

$$M(x,y) = y^3 + kxy^4 - 2x, \quad N(x,y) = 3xy^2 + 20x^2y^3$$

al aplicar el criterio de exactitud, se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
$$4kxy^3 = 40xy^3$$

se deduce entonces que $k = 10$ para garantizar la exactitud de la forma diferencial **(0.5 PUNTOS)**. Con eso se garantia la existencia de una función $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}M(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

se tiene **(1 PUNTO)**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y^3 + 10xy^4 - 2x$$
$$\Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)dx = xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 + C(y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 20x^2y^3 + C'(y) = N(x,y)$$

de lo anterior, se obtiene

$$C'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = c_0 \in \mathbb{R}.$$

Definiendo $C_0 := c - c_0$ **(0.3 PUNTOS)**, se concluye que la solución se puede escribir implícitamente por **(0.2 PUNTOS)**

$$\boxed{xy^3 + 5x^2y^4 - x^2 = C_0}$$

Problema 2. Para $x > 0$, determine la solución general de la EDO

$$x^2 y''(x) - 3xy'(x) + 13y(x) = 4 + 3x$$

Solución: haciendo el cambio de variable $x = e^z$, y por regla de la cadena, se obtiene la siguiente EDO auxiliar **(0.5 PUNTOS)**

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 13y(z) = 4 + 3e^z$$

la solución del problema es de la forma $y(z) = y_h(z) + y_p(z)$, donde

$$y_h(z) = c_1 e^{2z}\cos(3z) + c_2 e^{2x}\,\mathrm{sen}(3z) \quad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

es la solución del problema homogéneo, con $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$; y

$$y_p(z) = k_1 + k_2 e^z$$

es la solución del problema particular que se obtiene a partir del método del aniquilador. Al reemplazar la solución particular en la EDO auxiliar, se concluye que **(0.5 PUNTOS)**

$$k_1 = \frac{4}{13}, \quad k_2 = \frac{3}{10}$$

luego,

$$y(z) = c_1 e^{2z}\cos(3z) + c_2 e^{2x}\,\mathrm{sen}(3z) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}e^z$$

al hacer el cambio de variable inverso, se concluye que **(0.5 PUNTOS)**

$$\boxed{y(x) = x^2\big(c_1\cos(3\ln(x)) + c_2\,\mathrm{sen}(3\ln(x))\big) + \frac{4}{13} + \frac{3}{10}x}$$

Problema 3. Use la Transformada de Laplace para resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = -10\,\mathrm{sen}(2t) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: aplicando Transformada de Laplace a ambos lados de la EDO, y después de aplicar las condiciones iniciales, se obtiene

$$s^2Y(s) + s - Y(s) = -10\frac{s}{s^2+4} \quad \textbf{(0.2 PUNTOS)}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Despejando para $Y(s)$,

$$Y(s) = \frac{-20}{(s^2+4)(s^2-1)} - \frac{s}{s^2-1} \quad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

lo anterior admite la siguiente descomposición en suma de fracciones parciales

$$Y(s) = 2\frac{2}{s^2+2^2} - 4\frac{1}{s^1-2} - \frac{s}{s^2-1} \quad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambos lados y reagrupando términos, se concluye que
(0.8 PUNTOS)

$$\boxed{y(t) = 2\,\mathrm{sen}(2t) - \frac{5}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}}$$

RVA/rva
27 de Marzo de 2020