PAUTA EVALUACIÓN 3

Problema 1. Encuentre la solución general del siguiente sistema de EDO

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + e^t \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

Solución: sea el vector $Z(t) := (x(t)\ y(t))^T$. El problema entonces se reescribe en forma matricial como sigue

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Z(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Empezamos calculando la solución del problema homogéneo. La matriz asociada al problema posee los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

en donde, al calcular el espacio propio asociado, se llega a que éste está generado sólo por el siguiente vector a valores complejos

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

luego, una solución a valores complejos estará dada por

$$X(t) = \alpha e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

de aquí, las soluciones L. I. a valores reales del problema homogéneo se obtienen después de extraer la parte real y la parte imaginaria del vector $X(t)$, concluyendo así que la solución homogénea estará dada por **(1 PUNTO)**

$$Z_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solución particular la calcularemos usando el Método de Variación de Parámetros. Asumiremos entonces que existen funciones $c_1(t)$ y $c_2(t)$ tales que

$$Z_p(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Recordemos que estas funciones cumplen con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema que tiene por soluciones

$$c_1'(t) = e^t \cos(t) \quad c_2'(t) = e^t \operatorname{sen}(t)$$

integrando,

$$c_1(t) = \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)), \quad c_2(t) = \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen}(t) - \cos(t))$$

Luego,

$$Z_p(t) = \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2}(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)) \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Concluyéndose así que el sistema de EDO posee la siguiente solución **(1 PUNTO)**

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

con $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Use la Transformada de Laplace para resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = te^{2t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: al aplicar Transformada de Laplace a ambos lados, y después de aplicar las condiciones iniciales, se obtiene

$$s^2 Y(s) - 2s + Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Despejando para $Y(s)$, **(0.5 PUNTOS)**

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{(s^2+1)(s-2)^2}.$$

Se hace necesario descomponer el seguno término del lado derecho en una suma de fracciones parciales. Se asume que existen constantes reales A, B, C, D tales que

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-2)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{(s-2)^2}$$

lo anterior induce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sistema que tiene por solución

$$A = \frac{4}{25},\ B = \frac{3}{25},\ C = \frac{-4}{25},\ D = \frac{13}{25},$$

luego, **(1 PUNTO)**

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{25}\frac{4s+3}{s^2+1} - \frac{1}{25}\frac{4s-13}{(s-2)^2}$$

lo que a su vez se puede reescribir como

$$Y(s) = \frac{54}{25}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{25}\frac{1}{s^2+1} - \frac{4}{25}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(s-2)^2}$$

aplicando la Transformada Inversa de Laplace a ambos lados, se concluye que la solución general del problema estará dada por **(0.5 PUNTOS)**

$$\boxed{y(t) = \frac{54}{25}\cos(t) + \frac{3}{25}\,\mathrm{sen}(t) - \frac{4}{25}e^{2t} + \frac{1}{5}te^{2t}}.$$

Problema 3. Escoja y resuelva uno y sólo uno de los siguientes dos problemas. En caso que usted opte por resolver ambos, se considerará el peor evaluado.

(A). Escriba la siguiente EDO lineal de orden 3 como un sistema de tres EDOs de primer orden, y resuelva

$$x'''(t) - 3x''(t) - x'(t) + 3x(t) = 0$$

Solución: sea $Z(t) = (z_1(t)\ z_2(t)\ z_3(t))^T$ un vector de tres componentes tal que

$$z_1(t) = x(t), \quad z_2(t) = x'(t), \quad z_3(t) = x''(t)$$

Observemos que

$$x'''(t) = -3x(t) + x'(t) + 3x''(t)$$

es decir,

$$z_3'(t) = -3z_1(t) + z_2(t) + 3z_3(t)$$

Así,

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ x'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ -3z_1(t) + z_2(t) + 3z_3(t) \end{pmatrix}$$

lo que escrito en notación matricial, queda **(0.5 PUNTOS)**

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} Z(t)$$

Procedemos a obtener la solución homogénea. Observe que los autovalores de la matriz del problema son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3$$

en donde

- Para $\lambda_1 = 1$, su espacio propio asociado está generado por el vector

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda_2 = -1$, su espacio propio asociado está generado por el vector

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda_3 = 3$, su espacio propio asociado está generado por el vector

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

y por tanto, la solución homogénea estará dada por **(1 PUNTO)**

$$Z_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Recordemos, sin embargo, que nuestro objetivo es resolver la EDO de orden superior. Para ello, debemos mirar sólo la primera componente del vector solución. Como $z_1(t) = x(t)$, se concluye que la solución general de la EDO está dada por **(0.5 PUNTOS)**

$$\boxed{x(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t}}$$

(B). Use la Transformada de Laplace para resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} y'''(t) + y''(t) - y'(t) - y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

Solución: aplicando la Transformada de Laplace a ambos lados, y considerando las condiciones iniciales del problema, se obtiene

$$s^3Y(s) + s^2Y(s) - sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s}$$

donde $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Despejando para $Y(s)$, **(0.5 PUNTOS)**

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^3 + s^2 - s - 1)}.$$

Note que el polinomio $p(s) := s^3 + s^2 - s - 1$ tiene a $s = 1$ como raíz. Esto nos permite descomponerlo usando Ruffini; así, se llega a que

$$s^3 + s^2 - s - 1 = (s-1)(s^2 + 2s + s) = (s-1)(s+1)^2$$

y por tanto,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)^2}$$

Aquí, procederemos a hacer la descomposición en una suma de fracciones parciales. Definimos $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs + D}{(s+1)^2}$$

Al volver a hacer la suma de fracciones y al comparar en función de potencias de s, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde se llega a que

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{3}{4}, \quad D = \frac{5}{4}$$

por tanto, **(1 PUNTO)**

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3s+5}{(s+1)^2}\right).$$

El último término de la igualdad anterior puede ser trabajado. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{3s+5}{(s+1)^2} &= \frac{s+1+4+2s}{(s+1)^2} \\
&= \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{2s+4}{(s+1)^2} \\
&= \frac{1}{s+1} + \frac{s+1+3+s}{(s+1)^2} \\
&= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+3}{(s+1)^2} \\
&= \frac{2}{s+1} + \frac{s+1+2}{(s+1)^2} \\
&= \frac{2}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} \\
&= \frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

así, llegamos a que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ a ambos lados, se llega a la solución general del PVI **(0.5 PUNTOS)**

$$\boxed{y(t) = -1 + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}}$$

RVA/rva
20 de Marzo de 2020