PAUTA EVALUACIÓN 2

Problema 1. **(2.5 PUNTOS)**

Calcule la solución general del siguiente PVI para $x > 0$

$$\begin{cases} 2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = x^{-1}e^x \\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Solución: normalizando primero la EDO antes de resolver

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{2x}$$

se observa que ésta posee como solución homogénea a la función

$$y_h(x) = Ae^x + Bxe^x \qquad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

con A y B constantes reales por determinar a partir de las condiciones iniciales y en conjunto con la solución particular. Por otro lado, y mediante el método de variación de parámetros, asumamos que la solución particular es de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$$

con $c_1(x)$ y $c_2(x)$ funciones que cumplen con las siguientes relaciones

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}$$

donde

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{2x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}e^{2x},\ W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2x}e^{2x},\ W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = e^{2x}$$

luego,

$$c_1(x) = \int \frac{-\frac{1}{2}e^{2x}}{e^{2x}}dx = -\frac{x}{2} \qquad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

$$c_2(x) = \int \frac{\frac{1}{2x}e^{2x}}{e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\ln(x) \qquad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

y así,

$$y_p(x) = \frac{e^x}{2}(x\ln(x) - x)$$

por tanto, la solución general queda

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + \frac{e^x}{2}(x\ln(x) - x) \qquad \textbf{(0.4 PUNTOS)}$$

Ahora resta imponer las condiciones iniciales. Derivando una vez la solución, se obtiene

$$y'(x) = (A+B)e^x + Bxe^x + \frac{xe^x}{2}(\ln(x) - 1) + \frac{e^x}{2}\ln(x).$$

Imponiendo en este punto las condiciones iniciales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2A + 2B = 1 \\ 2A + 4B = 1 \end{cases}$$

donde $A = \frac{1}{2}$ y $B = 0$ **(0.4 PUNTOS)**. Se concluye entonces que la solución del PVI estará dada por **(0.2 PUNTOS)**

$$\boxed{y(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{2}(x\ln(x) - x)}$$

Problema 2. **(2 PUNTOS)**

Encuentre la solución del siguiente PVI

$$x^2y''(x) - 5xy'(x) + 8y(x) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Solución: observemos que ésta es una EDO de Euler-Cauchy. Haciendo el cambio de variable $x = e^z$, se llega a la siguiente EDO auxiliar a coeficientes constantes

$$y_{zz}(z) - 6y_z(z) + 8y(z) = 0 \qquad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

usando notación de operadores diferenciales

$$(D_z^2 - 6D_z + 8)y(z) = 0$$

expresión que se puede factorizar fácilmente:

$$(D_z - 4)(D_z - 2)y(z) = 0$$

de aquí, se desprende que la solución homogénea (y general) del problema estará dada por

$$y(z) = c_1e^{4z} + c_2e^{2z} \qquad \textbf{(0.4 PUNTOS)}$$

con c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ por calcular en función de las condiciones iniciales. Haciendo el cambio de variable inverso $z = \ln(x)$, se concluye que

$$y(x) = c_1 x^4 + c_2 x^2 \qquad \textbf{(0.4 PUNTOS)}$$

Procedemos ahora a derivar para obtener las constantes c_1 y c_2. Se obtiene

$$y'(x) = 4c_1 x^3 + 2c_2 x.$$

Al imponer entonces las condiciones $y(1/2) = 1$ y $y'(1/2) = 0$, se debiese llegar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 + 4c_2 = 16 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

que da como resultado $c_1 = -16$ y $c_2 = 8$ **(0.5 PUNTOS)**. Luego, la solución del PVI estará dada por **(0.2 PUNTOS)**

$$\boxed{y(x) = -16x^4 + 8x^2}$$

Problema 3. **(1.5 PUNTOS)**

Una masa de $3[kg]$ se une a un resorte que cuelga desde el techo, haciendo que éste se estire $10[m]$ hasta llegar al reposo en equilibrio. Desde esa posición, la masa se estira $1[m]$ hacia abajo, y acto seguido se le aplica una fuerza externa $F(t) = 20\cos(t)[N]$, para después soltarla. Asuma que no existe amortiguamiento alguno sobre la masa, y que $g = 10[m/s^2]$.

(a) Plantee el PVI que describe el movimiento de la masa.

(b) ¿Está el sistema en resonancia? Justifique sus afirmaciones.

Solución: sabiendo que la masa alcanza el equilibrio cuando el resorte se estira $10[m]$, se obtiene su constante de Hooke

$$k = \frac{3[kg]10[m/s^2]}{10[m]} = 3[N/m] \quad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

por otro lado, como la masa se estira $1[m]$ hacia abajo antes de ser soltada, se tiene que $y(0) = 1$ y que $y'(0) = 0$. Por tanto, el PVI que modela la situación está dado por

$$\boxed{\begin{cases} 3y''(x) + 3y(x) = 20\cos(t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}} \qquad \textbf{(0.5 PUNTOS)}$$

Para determinar la resonancia, podemos proceder de dos maneras **(0.5 PUNTOS)**

Forma 1: observemos que la EDO puede ser reescrita como

$$(3D^2 + 3)y(x) = 20\cos(t)$$

y dividiendo la igualdad anterior por 3,

$$(D^2 + 1)y(x) = \frac{20}{3}\cos(t).$$

En este paso, aplicamos el operador que aniquila a la fuerza externa, que está dado por $(D^2 + 1)$. Se obtiene entonces

$$(D^2 + 1)(D^2 + 1)y(x) = 0$$

es decir,

$$(D^2 + 1)^2 y(x) = 0$$

luego,

$$y(x) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t) + t(C\cos(t) + D\operatorname{sen}(t)), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

solución general que muestra que el sistema, en efecto, **está en resonancia**.

Forma 2: Notemos que la frecuencia natural del sistema está dada por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{3}{3} = 1$$

que coincide (numéricamente) con la frecuencia de oscilación de la fuerza externa. Luego, se concluye el sistema **está en resonancia**.

RVA/rva
18 de Septiembre de 2019