UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Ecuaciones Diferenciales - 220135
Semestre II, 2019

PAUTA EVALUACIÓN 1

Problema 1: encuentre la solución del siguiente PVI para $t \geq 0$

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} t\,\mathrm{sen}(t^2), & t \in (0, \sqrt{\pi}) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}, & t \geq \sqrt{\pi} \end{cases}, \qquad y(0) = \frac{-1}{2}$$

Solución: el presente problema nos obliga a resolver dos PVI: uno para $t \in (0, \sqrt{\pi})$, y otro para $t \geq \sqrt{\pi}$. Para la primera parte, debemos resolver

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = t\,\mathrm{sen}(t^2), & t \in (0, \sqrt{\pi}) \\ y(0) = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

la EDO es del tipo separable, en donde sólo debemos integrar a ambos lados entre $t = 0$ y $t \in (0, \sqrt{\pi})$ para resolver: se tiene

$$\int_0^t \frac{dy}{ds} ds = \int_0^t s\,\mathrm{sen}(s^2) ds$$

donde la primitiva del integrando del lado derecho es $-\frac{1}{2}\cos(s^2)$; así,

$$y(t) - y(0) = -\frac{1}{2}\cos(s^2)\Big|_0^t$$

haciendo $y(0) = -\frac{1}{2}$, se concluye que (0.8 PUNTOS)

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(t^2)$$

que corresponde a la solución del tramo $t \in (0, \sqrt{\pi})$. Para resolver el segundo tramo, necesitamos la condición inicial que nos permite plantear el PVI de buena manera. Evaluando la solución del primer tramo en $t = \sqrt{\pi}$, se obtiene que

$$y(\sqrt{\pi}) = -\frac{1}{2}\cos(\pi) = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, el PVI asociado al segundo tramo está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}, & t > \sqrt{\pi} \\ y(\sqrt{\pi}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Integrando a ambos lados entre $\sqrt{\pi}$ y $t > \sqrt{\pi}$,

$$y(t) - y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t - \sqrt{\pi})$$

recordando que $y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2}$, se obtiene (0.8 PUNTOS)

$$y(t) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}}$$

que corresponde a la solución del segundo tramo. Así, se concluye que la solución del PVI original está dada por (0.4 PUNTOS)

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cos(t^2), & t \in (0, \sqrt{\pi}) \\ \\ \dfrac{t}{2\sqrt{\pi}}, & t \geq \sqrt{\pi} \end{cases}}$$

Problema 2: considere la forma diferencial

$$2y\cos(y)dx + (2x\cos(y) - xy\,\mathrm{sen}(y))dy = 0$$

1. Verifique que ella no es exacta.

2. Encuentre los valores de r y s de modo que la función $\mu(x, y) = x^r y^s$ sea un factor integrante (FI) idóneo. Una vez encontrados, use dicho FI para resolver la ecuación.

Solución: conviene comenzar identificando las funciones $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$ que forman parte de la Forma Diferencial (FD):

$$M(x, y) = 2y\cos(y), \quad N(x, y) = 2x\cos(y) - xy\,\mathrm{sen}(y)$$

derivando,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\cos(y) - 2y\,\mathrm{sen}(y), \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos(y) - y\,\mathrm{sen}(y).$$

Como no coinciden, se concluye que la FD no es exacta. (0.6 PUNTOS)

Consideremos ahora el candidato a FI $\mu(x,y) = x^r y^s$. Multiplicando la FD por μ,

$$2x^r y^{s+1}\cos(y)dx + (2x^{r+1}y^s\cos(y) - x^{r+1}y^s\,\mathrm{sen}(y))dy = 0$$

en este punto, se hace conveniente definir las siguientes funciones

$$\tilde{M}(x,y) = 2x^r y^{s+1}\cos(y), \quad \tilde{N}(x,y) = 2x^{r+1}y^s\cos(y) - x^{r+1}y^{s+1}\,\mathrm{sen}(y).$$

Recordemos que este nuevo FI tiene como propósito forzar la exactitud de la FD. Luego, para que μ sea un FI idóneo se debe cumplir que

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}$$

donde

$$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}2(s+1)x^r y^s\cos(y) - 2x^r y^{s+1}\,\mathrm{sen}(y), \quad \frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} = 2(r+1)x^r y^s\cos(y) - (r+1)x^r y^{s+1}\,\mathrm{sen}(y)$$

comparando término a término, se obtiene

$$2(s+1) = 2(r+1) \qquad 2 = r+1$$

de donde se deduce que $r = 1$ y $s = 1$. Luego, el FI queda (0.6 PUNTOS)

$$\mu(x,y) = xy$$

Luego, la nueva FD a resolver está dada por

$$2xy^2\cos(y)dx + (2x^2y\cos(y) - x^2y\,\mathrm{sen}(y))dy = 0$$

donde

$$\tilde{M}(x,y) = 2xy^2\cos(y), \quad \tilde{N}(x,y) = 2x^2y\cos(y) - x^2y^2\,\mathrm{sen}(y).$$

dado que esta FD es exacta, se deduce la existencia de una función $f(x,y) = c$, para alguna constante $c \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

por simplicidad, comenzaremos trabajando con la función $M(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\cos(y)$$

integrando a ambos lados con respecto a x:

$$f(x, y) = x^2y^2 \cos(y) + g(y)$$

derivando a ambos lados con respecto a y, y luego igualando con $N(x, y)$, queda

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y \cos(y) - x^2y^2 \operatorname{sen}(y) + g'(y) = 2x^2y \cos(y) - x^2y^2 \operatorname{sen}(y)$$

luego,

$$g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Así, y haciendo $C_0 = c - k$, se tiene que (0.6 PUNTOS)

$$f(x, y) = x^2y^2 \cos(y) + k = c$$

de donde se concluye que la solución del problema está dada implícitamente por

$$\boxed{x^2y^2 \cos(y) = C_0, \quad C_0 = c - k \in \mathbb{R}} \qquad \text{(0.2 PUNTOS)}$$

Problema 3: Un lago con buena circulación contiene inicialmente 1000 $[kL]$ de agua contaminada a una concentración de 2 $[kg/kL]$. Agua del desagüe de una fábrica entra al lago a una tasa de 5 $[kL/h]$ con una concentración de 7 $[kg/kL]$ de contaminante. El agua fluye por una tubería de salida a una tasa de 2 $[kL/h]$. Determine la cantidad y la concentración de contaminante como una función del tiempo.

Solución: siempre se hace útil tener a mano la información que entrega el enunciado. Dado que éste es un problema de mezclas, debemos tener claras las tasas de entrada y salida de líquidos al contenedor en cuestión (en este ejercicio: el lago). En nuestro caso, tenemos que (0.3 PUNTOS)

- Entra agua contaminada a una tasa de 5 $[kL/h]$, la que presenta una densidad de 7 $[kg/kL]$ de contaminante.
- Sale mezcla del lago a una tasa de 2 $[kL/h]$.
- Haciendo $V = V(t)$ el volumen de mezcla que presenta el lago medido en $[kL]$, se tiene que $V(0) = 1000\,[kL]$.
- Haciendo $A = A(t)$ la cantidad de contaminante medida en $[kg]$, se tiene que $A(0) = \big(1000\,[kL]\big)\big(2\,[kg/kL]\big) = 2000\,[kg]$

A partir de los datos del enunciado, tenemos que la variación del volumen de mezcla en el lago está dada por la siguiente EDO

$$\frac{dV}{dt} = 5\,[kL/h] - 2\,[kL/h] = 3\,[kL/h]$$

recordando que $V(0) = 1000$, integramos a ambos lados entre $t = 0$ y $t > 0$ para deducir que el volumen de mezcla en función del tiempo está dado por

$$V(t) = 1000 + 3t\,[kL] \qquad \text{(0.5 PUNTOS)}.$$

En cuanto a la cantidad de contaminante, se tiene que entran $\big(5\,[kL/h]\big)\big(7\,[kg/kL]\big) = 35\,[kg/h]$; es decir, la razón de entrada de contaminante R_{ent} estará dada por $R_{ent} = 35\,[kg/h]$. En cuanto a la razón de salida R_{sal}: multiplicando la densidad de contaminante $\rho(t)$ por la tasa de salida de mezcla, se obtiene que

$$R_{sal} = \Big(\rho(t)\Big)\Big(2\,[kL/h]\Big)$$

Recordemos que la densidad se puede calcular haciendo $\rho(t) := A(t)/V(t)$, cantidad que se mide en $[kg/kL]$. Luego, la variación de contaminante con respecto al tiempo estará dada por

$$\frac{dA}{dt} = R_{ent} - R_{sal} = 35 - 2\rho(t) = 35 - 2\frac{A(t)}{V(t)}$$

y recordando la expresión obtenida para el volumen, se concluye que la cantidad de contaminante queda descrita por la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} + \dfrac{2}{1000 + 3t}A(t) = 35 \\ A(0) = 2000 \end{cases}$$

la presente EDO es lineal, por lo que nos vemos obligados a calcular un FI idóneo para resolver. Éste estará dado por

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{2}{1000 + 3t}dt\right) = \exp\Big(\frac{2}{3}\ln(1000{+}3t)\Big) = \exp(\ln(1000{+}3t)^{\frac{2}{3}}) = (1000{+}3t)^{\frac{2}{3}}$$

en donde el valor absoluto fue descartado de inmediato debido a que $1000 + 3t \geq 0, \forall t \geq 0$. Multiplicando la EDO por este FI, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\big((1000 + 3t)^{\frac{2}{3}}A(t)\big) = 35(1000 + 3t)^{\frac{2}{3}}$$

integrando entre $t = 0$ y $t > 0$, se obtiene

$$\big((1000 + 3t)^{\frac{2}{3}}A(t)\big) - \big((1000)^{\frac{2}{3}}A(0)\big) = 35\frac{(1000 + 3t)^{\frac{5}{3}}}{5} - 35\frac{(1000^{\frac{5}{3}})}{5}$$

haciendo $A(0) = 2000$,

$$(1000 + 3t)^{\frac{2}{3}}A(t) = 7(1000 + 3t)^{\frac{5}{3}} - 7(1000^{\frac{5}{3}}) + 2(1000)^{\frac{5}{3}}$$

así, la cantidad de contaminante en función del tiempo estará dada por

$$\boxed{A(t) = 7(1000 + 3t) - 5\frac{1000^{\frac{5}{3}}}{(1000 + 3t)^{\frac{2}{3}}}} \qquad \text{(1 PUNTO)}$$

mientras que la concentración estará dada por

$$\boxed{\rho(t) = \frac{A(t)}{V(t)} = 7 - 5\frac{1000^{\frac{5}{3}}}{(1000 + 3t)^{\frac{5}{3}}}} \qquad \text{(0.2 PUNTOS)}$$