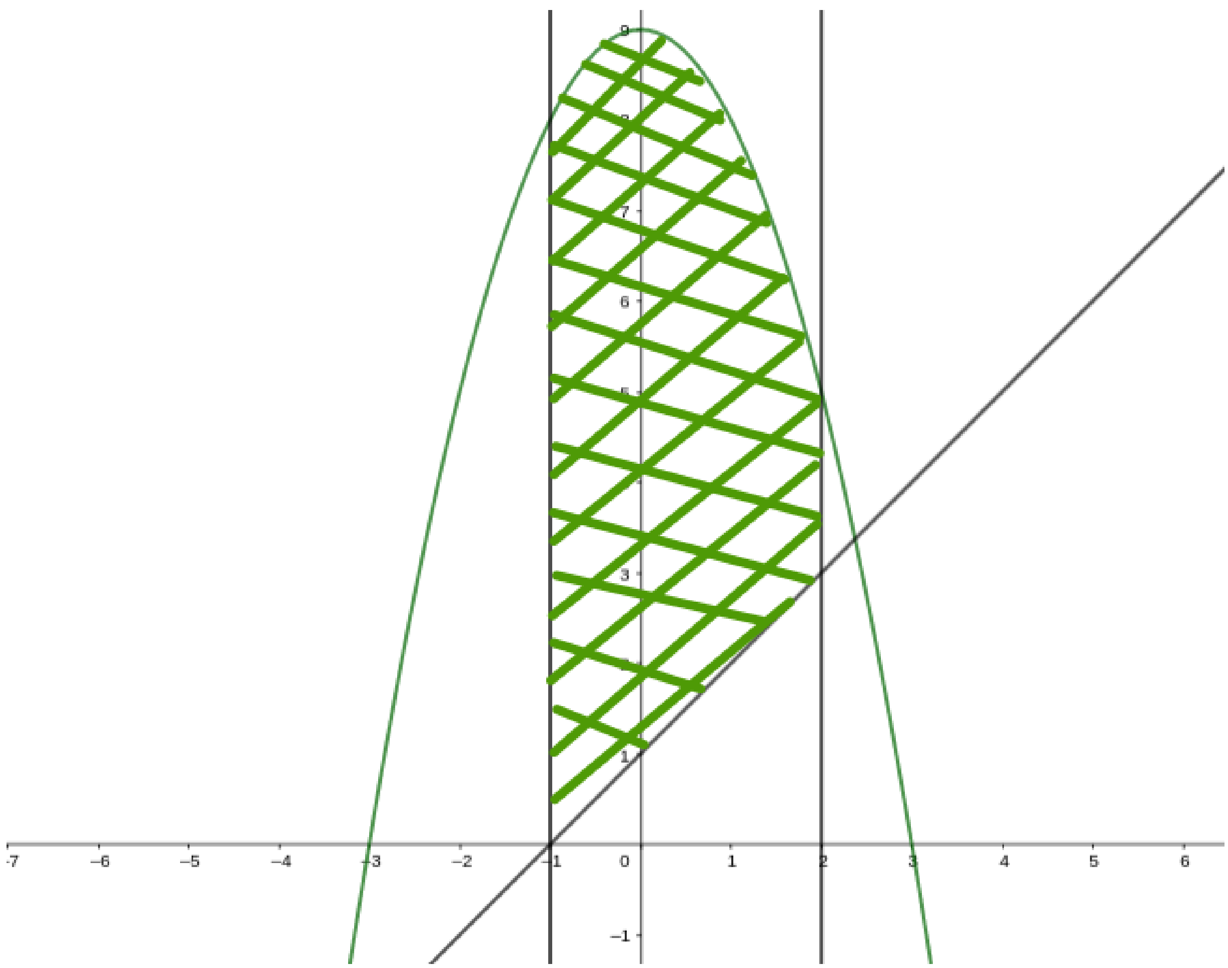
UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cálculo Integral 220181
Semestre I, 2020

PAUTA EVALUACIÓN 2

Problema 1: Dibuje las regiones definidas por las curvas dadas, y calcule el área que ellas encierran. **(25 PUNTOS)**

(A) $y = x + 1,\ y = 9 - x^2,\ x = -1,\ x = 2$

Solución: al graficar la situación, debieramos obtener una figura similar a la adjunta a continuación **(5 ptos.)**



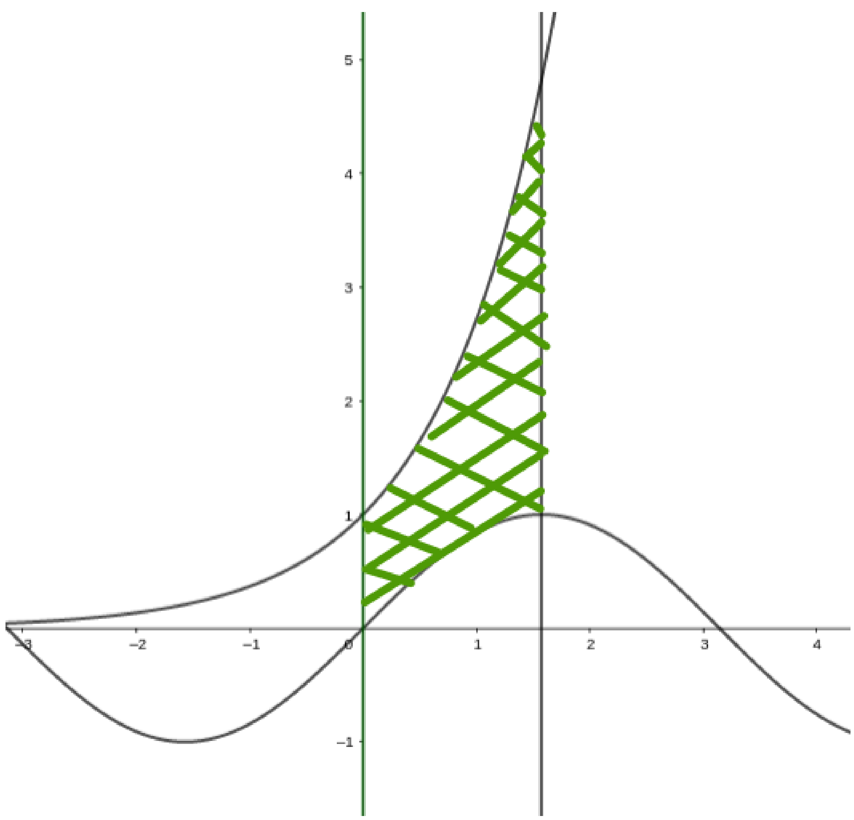
Con esto, el área de la región achurada estará dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \big(9 - x^2\big) - \big(x+1\big)dx \quad \textbf{(10 ptos.)} \\ &= \int_{-1}^{2} \big(-x^2 - x + 8\big)\,dx \quad \textbf{(4 ptos.)} \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 8x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2} \quad \textbf{(4 ptos.)} \\ &= \frac{39}{2} \end{aligned}$$

es decir, el área de la región encerrada por las curvas vale $\boxed{\frac{39}{2}}$ **(2 ptos.)**.

(B) $y = \text{sen}(x),\ y = e^x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

Solución: al graficar la situación, debieramos obtener una figura similar a la adjunta a continuación **(5 ptos.)**



Con esto, el área de la región achurada estará dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(e^x - \operatorname{sen}(x)\big) dx \quad \textbf{(10 ptos.)} \\ &= \Big(e^x + \cos(x)\Big)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \quad \textbf{(8 ptos.)} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - 2 \\ &\approx 2.8105 \end{aligned}$$

es decir, el área de la región encerrada por las curvas vale $\boxed{e^{\frac{\pi}{2}} - 2}$ **(2 ptos.)**.

Problema 2: encuentre la solución del PVI **(35 PUNTOS)**

(A) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2 - 4y^2 + 4x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2 - 9y^2 + 9x^2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Solución común: sea la EDO

$$y'(x) = 1 - x^2 - \alpha^2 y^2 + \alpha^2 x^2 y^2$$

donde $\alpha = 2$ para la parte (A), y $\alpha = 3$ para la parte (B). Factorizando el lado derecho de la EDO **(4 ptos.)**

$$1 - x^2 - \alpha^2 y^2 + \alpha^2 x^2 y^2 = 1 - x^2 - \alpha^2 y^2(1 - x^2) = (1 - x^2)(1 - \alpha^2 y^2)$$

es decir, la EDO es a variables separables, la cual se puede re-escribir como

$$\frac{1}{1 - \alpha^2 y^2}\frac{dy}{dx} = (1 - x^2) \quad \textbf{(4 ptos.)}$$

integrando a ambos lados, y usando un cambio de variable adecuado,

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1 - \alpha^2 \omega^2} d\omega = \int_0^x (1 - t^2) dt$$

para integrar el lado izquierdo, re-escribiremos el integrando como una suma de fraciones parciales; postulamos entonces la existencia de constantes reales A y B tales que

$$\frac{1}{1-\alpha^2\omega^2} = \frac{1}{(1+\alpha\omega)(1-\alpha\omega)} = \frac{A}{1+\alpha\omega} + \frac{B}{1-\alpha\omega}$$

al hacer la suma de fracciones al lado derecho, se obtiene

$$\frac{1}{1-\alpha^2\omega^2} = \frac{(A+B)+(B-A)\alpha\omega}{1-\alpha^2\omega^2}$$

de donde, al comparar término a término, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ B-A &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $A = B = \frac{1}{2}$. Por tanto **(10 ptos.)**[1]

$$\frac{1}{1-\alpha^2\omega^2} = \frac{1}{2(1+\alpha\omega)} + \frac{1}{2(1-\alpha\omega)}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} \int_1^{y(x)} \frac{1}{1-\alpha^2\omega^2} d\omega &= \int_1^{y(x)} \frac{1}{2(1+\alpha\omega)} + \frac{1}{2(1-\alpha\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1+\alpha\omega\Big| - \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1-\alpha\omega\Big|\Bigg|_{\omega=1}^{\omega=y(x)} \\ &= \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1+\alpha y(x)\Big| - \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1-\alpha y(x)\Big| \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1+\alpha\Big| + \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|1-\alpha\Big| \\ &= \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|\big(1+\alpha y(x)\big)\big(1-\alpha y(x)\big)^{-1}\Big| \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha}\ln\Big|(1+\alpha)(1-\alpha)^{-1}\Big| \end{aligned}$$

[1] El puntaje sólo se asignará si el estudiante hizo **todos** los cálculos necesarios para llegar a esta descomposición.

es decir,

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1-\alpha^2\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{(1+\alpha y(x))(1-\alpha)}{(1-\alpha y(x))(1+\alpha)} \right| \quad \textbf{(10 ptos.)}$$

por otro lado,

$$\int_0^x (1-t^2)dt = \left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = x - \frac{x^3}{3} = \frac{x}{3}(3-x^2) \quad \textbf{(2 ptos.)}$$

así,

$$\frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{(1+\alpha y(x))(1-\alpha)}{(1-\alpha y(x))(1+\alpha)} \right| = \frac{x}{3}(3-x^2)$$

y por definición de logaritmo natural,

$$\exp\left(\frac{2\alpha x}{3}(3-x^2)\right) = \left| \frac{(1+\alpha y(x))(1-\alpha)}{(1-\alpha y(x))(1+\alpha)} \right|$$

Para la parte (A): al hacer $\alpha = 2$, se obtiene

$$\exp\left(\frac{4x}{3}(3-x^2)\right) = \left| \frac{(1+2y(x))(-1)}{(1-2y(x))(3)} \right| = \frac{1}{3}\left| \frac{(1+2y(x))}{(1-2y(x))} \right|$$

y asumiendo[2] $1 - 2y(x) \leq 0$,

$$3\exp\left(\frac{4x}{3}(3-x^2)\right) = \frac{(1+2y(x))}{(2y(x)-1)}$$

desde donde se concluye que **(5 ptos.)**

$$\boxed{y(x) = \frac{1+3e^{\frac{4x}{3}(3-x^2)}}{6e^{\frac{4x}{3}(3-x^2)}-2}}$$

[2]Esto se asume para que la condición inicial tenga sentido; es decir, cuando $y(0) = 1$.

Para la parte (B): al hacer $\alpha = 3$, se obtiene

$$\exp\Big(2x(3-x^2)\Big) = \left|\frac{(1+3y(x))(-2)}{(1-3y(x))(4)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{(1+3y(x))}{(1-3y(x))}\right|$$

y asumiendo[3] $1-3y(x) \leq 0$,

$$2\exp\Big(2(3x-x^3)\Big) = \frac{(1+3y(x))}{(3y(x)-1)}$$

al despejar para $y(x)$, se concluye que **(5 ptos.)**

$$\boxed{y(x) = \frac{1+2e^{2(3x-x^3)}}{6e^{2(3x-x^3)}-3}}$$

Problema 3: **(25 PUNTOS)**

(A) Encuentre la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P_0(-2,3,2)$ y Q, donde Q es la intersección de las rectas $L_1 : (x,y,z) = (11,-5,-10)+ t_1(-4,2,3),\ t_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 : (-7,11,-3)+h(3,-5,1),\ h \in \mathbb{R}$

Solución: sea $Q(x_0,y_0,z_0) \in L_1 \cap L_2$. Esto entonces induce la existencia de constantes reales t_1 y h tales que **(5 ptos.)**

$$\begin{aligned} x_0 &= 11-4t_1 = -7+3h \quad (1)\\ y_0 &= -5+2t_1 = 11-5h \quad (2)\\ z_0 &= -10+3t_1 = -3+h \quad (3)\end{aligned}$$

Al tomar la ecuación (1) y sumar 2 veces la ecuación (2), se obtiene

$$1+0 = 15+7h$$

lo que nos lleva a concluir que $h=2$ **(6 ptos.)**. Al reemplazar este valor en (2), se llega a que $t_1 = 3$ **(4 ptos.)**. Al reemplazar ambos valores en (3), se llega a que

$$-10+9 = -3+2 = -1$$

[3] Esto se asume para que la condición inicial tenga sentido; es decir, cuando $y(0)=1$.

lo que nos permite concluir que los valores obtenidos de t_1 y h son la única solución de nuestro problema[4]. Con esto, y reemplazando t_1 en L_1 o h en L_2, se llega a que **(5 ptos.)**

$$Q(-1,1,-1)$$

por tanto, el vector director $\vec{\ell}$ que modela la recta pedida estará dado por **(3 ptos.)**

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{P_0Q} = (-1,-2,-3)$$

y así, la ecuación de la recta pedida será **(2 ptos.)**

$$\boxed{L:\ (x,y,z) = (-2,3,2) - t(1,2,3),\ t \in \mathbb{R}}$$

(B) Encuentre la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P_0(2,3,2)$ y Q, donde Q es la intersección de las rectas $L_1 : (x,y,z) = (3,7,7) + t_1(1,4,3),\ t_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 : (-7,-5,13) + h(2,1,-3),\ h \in \mathbb{R}$

Solución: sea $Q(x_0,y_0,z_0) \in L_1 \cap L_2$. Esto entonces induce la existencia de constantes reales t_1 y h tales que **(5 ptos.)**

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 + t_1 = -7 + 2h \quad (1) \\ y_0 &= 7 + 4t_1 = -5 + h \quad (2) \\ z_0 &= 7 + 3t_1 = 13 - 3h \quad (3) \end{aligned}$$

Al tomar la ecuación (3) y restar 3 veces la ecuación (1), se obtiene

$$-2 + 0 = 34 - 9h$$

lo que nos lleva a concluir que $h = 4$ **(6 ptos.)**. Al reemplazar este valor en (1), se llega a que $t_1 = -2$ **(4 ptos.)**. Al reemplazar ambos valores en (2), se llega a que

$$7 - 8 = -5 + 4 = -1$$

[4]Alternativamente, se pudo haber planteado un sistema de ecuaciones en forma matricial y haber estudiado la compatibilidad de éste.

lo que nos permite concluir que los valores obtenidos de t_1 y h son la única solución de nuestro problema[5]. Con esto, y reemplazando t_1 en L_1 o h en L_2, se llega a que **(5 ptos.)**

$$Q(1,-1,1)$$

por tanto, el vector director $\vec{\ell}$ que modela la recta pedida estará dado por **(3 ptos.)**

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{P_0Q} = (-1,4,-1)$$

y así, la ecuación de la recta pedida será **(2 ptos.)**

$$\boxed{L:\ (x,y,z) = (-2,3,2) + t(-1,4,-1),\ t \in \mathbb{R}}$$

Problema 4: **(15 PUNTOS)**

(A) Encuentre la ecuación del plano Π_1 que pasa por el punto $P(-4,2,7)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = (3,-2,8)$. Calcule, además, el ángulo que forma Π_1 con el plano $\Pi_2 : 2x - 5y + 3z = 2$

Solución: la ecuación del plano Π_1 estará dada por

$$\Pi_1:\ 3x - 2y + 8z = 40 \quad \textbf{(6 ptos.)}$$

y denotando $\vec{\ell_1} = (3,-2,8)$ y $\vec{\ell_2} = (2,-5,3)$ los vectores normales de Π_1 y Π_2, respectivamente, entonces el ángulo α que forman los planos será tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{\ell_1} \cdot \vec{\ell_2}}{||\vec{\ell_1}||\ ||\vec{\ell_2}||}.$$

Al hacer el ćalculo, se obtiene $\vec{\ell_1} \cdot \vec{\ell_2} = 40$, $||\vec{\ell_1}|| = \sqrt{77}$, y $||\vec{\ell_2}|| = \sqrt{38}$ **(2 ptos c/u)**. Así

$$\cos(\alpha) = \frac{40}{\sqrt{77}\sqrt{38}} \implies \alpha = \arccos\left(\frac{40}{\sqrt{77}\sqrt{38}}\right) \quad \textbf{(3 ptos.)}$$

[5]Alternativamente, se pudo haber planteado un sistema de ecuaciones en forma matricial y haber estudiado la compatibilidad de éste.

es decir,

$$\boxed{\alpha \approx 42^{\text{o}}}$$

(B) Encuentre la ecuación del plano Π_1 que pasa por el punto $P(4, 2, 7)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = (-3, -2, 8)$. Calcule, además, el ángulo que forma Π_1 con el plano $\Pi_2 : 4x + 2y + z = 2$

Solución: la ecuación del plano Π_1 estará dada por

$$\Pi_1 : \; -3x - 2y + 8z = 40 \quad \textbf{(6 ptos.)}$$

y denotando $\vec{\ell_1} = (-3, -2, 8)$ y $\vec{\ell_2} = (4, 2, 1)$ los vectores normales de Π_1 y Π_2, respectivamente, entonces el ángulo α que forman los planos será tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{\ell_1} \cdot \vec{\ell_2}}{||\vec{\ell_1}|| \; ||\vec{\ell_2}||}.$$

Al hacer el ćalculo, se obtiene $\vec{\ell_1} \cdot \vec{\ell_2} = -8$, $||\vec{\ell_1}|| = \sqrt{77}$, y $||\vec{\ell_2}|| = \sqrt{21}$ **(2 ptos c/u)**. Así

$$\cos(\alpha) = \frac{-8}{\sqrt{77}\sqrt{21}} \implies \alpha = \arccos\left(\frac{-8}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \quad \textbf{(3 ptos.)}$$

es decir,

$$\boxed{\alpha \approx 101^{\text{o}}}$$

RVA/rva
28 de Julio de 2020