UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cálculo Integral 220181
Semestre I, 2020

PAUTA EVALUACIÓN 1

Resuelva las integrales asignadas usando el método que le sea más conveniente.

I.- **(20 PUNTOS)**

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+4x}dx$

Solución: observe que

$$\int \frac{2x+1}{4x^2+4x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

haciendo la substitución $u = x^2 + x$ **(5 PUNTOS)**, se llega a $du = (2x+1)dx$ **(5 PUNTOS)**. Reemplazando en la integral y calculando,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{x^2+x}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du && \textbf{(4 PUNTOS)} \\ &= \frac{1}{4}\ln|u| + C && \textbf{(4 PUNTOS)} \end{aligned}$$

y retornando a x desde u, se concluye que **(2 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{2x+1}{4x^2+4}dx = \frac{1}{4}\ln|x^2+x| + C}$$

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{3x^3+1}dx$

Solución: haciendo $u = 3x^2 + 1$ **(5 PUNTOS)**, se obtiene $du = 9x^2dx$. De lo anterior, $\frac{1}{9}du = x^2dx$ **(5 PUNTOS)**; y reemplazando en la integral,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{3x^3+1}dx &= \frac{1}{9}\int \sqrt{u}du && \textbf{(4 PUNTOS)}\\ &= \frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du\\ &= \frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{2}+C && \textbf{(4 PUNTOS)}\end{aligned}$$

es decir **(2 PUNTOS)**

$$\boxed{\int x^2\sqrt{3x^3+1}dx = \frac{2}{27}\sqrt{(3x^3+1)^3}+C}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$

Solución: hacemos $u = \sqrt{t}$ **(5 PUNTOS)**. Luego, $du = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$; y reacomodando, $2du = \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ **(5 PUNTOS)**. Reeplazando en la integral,

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt &= 2\int \cos(u)du && \textbf{(4 PUNTOS)}\\ &= 2\,\mathrm{sen}(u)+C && \textbf{(4 PUNTOS)}\end{aligned}$$

y retornando a t desde u, se concluye que **(2 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt = 2\,\mathrm{sen}(\sqrt{t})+C}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

SOLUCIÓN: haciendo la substitución $u = \frac{1}{x}$ **(5 PUNTOS)**, se llega a que $du = -\frac{1}{x^2}dx$ **(5 PUNTOS)**. Reemplazando en la integral,

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx &= -\int e^u du && \textbf{(4 PUNTOS)} \\ &= -e^u + C && \textbf{(4 PUNTOS)} \end{aligned}$$

es decir **(2 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -e^{1/x} + C}$$

II.- **(30 PUNTOS)**

(1) $\displaystyle\int x\ln(x)dx$

SOLUCIÓN: usando el Método de Integración por Partes, escogemos **(16 PUNTOS)**

$$u = \ln(x) \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx, \qquad dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

luego **(8 PUNTOS)**

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int xdx$$

es decir **(6 PUNTOS)**

$$\boxed{\int x\ln(x)dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C}$$

(2) $\displaystyle\int (x-2)e^x dx$

Solución: observe que **(3 PUNTOS)**

$$\int (x-2)e^x dx = \int xe^x dx - 2\int e^x dx = \int xe^x dx - 2e^x + C \quad (*)$$

para la integral que resta, usaremos el Método de Integración por Partes. Escogemos **(14 PUNTOS)**

$$u = x \Longrightarrow du = dx \qquad dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$

luego **(7 PUNTOS)**

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

reemplazando en $(*)$, se concluye que **(6 PUNTOS)**

$$\boxed{\int (x-2)e^x dx = xe^x - 3e^x + C}$$

(3) $\displaystyle\int \cos(x)\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big)dx$

Solución: usando el Método de Integración por Partes, escogemos **(16 PUNTOS)**

$$u = \ln(\operatorname{sen}(x)) \Longrightarrow du = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx \quad dv = \cos(x)dx \Longrightarrow v = \operatorname{sen}(x)$$

luego **(8 PUNTOS)**

$$\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))dx = \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) - \int \operatorname{sen}(x)\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}dx$$

es decir **(6 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \cos(x)\ln(\operatorname{sen}(x))dx = \operatorname{sen}(x)\ln(\operatorname{sen}(x)) - \operatorname{sen}(x) + C}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}dy$

Solución: usando el Método de Integración por Partes, escogemos **(16 PUNTOS)**

$$u = \ln(y) \Longrightarrow du = \frac{1}{y}dy \quad dv = \frac{1}{\sqrt{y}}dy \Longrightarrow v = 2\sqrt{y}$$

luego **(8 PUNTOS)**

$$\int \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}dy = 2\sqrt{y}\ln(y) - \int 2\sqrt{y}\frac{1}{y}dy = 2\sqrt{y}\ln(y) - 2\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

es decir **(6 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{\ln(y)}{\sqrt{y}}dy = 2\sqrt{y}\ln(y) - 4\sqrt{y} + C}$$

III.- **(30 PUNTOS)**

(1) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución: hacemos la substitución $x = \operatorname{sen}(\theta)$, de donde se decude que $dx = \cos(\theta)d\theta$ **(5 PUNTOS)**. Reemplazando en la integral y calculando

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{(\operatorname{sen}(\theta)+1)\cos(\theta)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}d\theta \qquad \textbf{(10 PUNTOS)}\\ &= \int \frac{(\operatorname{sen}(\theta)+1)\cos(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta\\ &= \int \operatorname{sen}(\theta)d\theta + \int d\theta\\ &= -\cos(\theta) + \theta + C \qquad \textbf{(5 PUNTOS)}\end{aligned}$$

Sólo resta volver a x desde θ. Recordemos que $x = \operatorname{sen}(\theta)$. Por tanto, $\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ **(5 PUNTOS)**. Se concluye entonces **(5 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{sen}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2} + C}$$

(2) $\displaystyle\int \tan^3(x)dx$

Solución: observe que

$$\begin{aligned}\int \tan^3(x)dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)dx \qquad \textbf{(4 PUNTOS)}\\ &= \int \tan(x)\big(\sec^2(x)-1\big)dx\\ &= \int \tan(x)\sec^2(x)dx - \int \tan(x)dx \ (***)\end{aligned}$$

para la primera integral, hacemos $u = \tan(x) \Longrightarrow du = \sec^2(x)dx$. Se obtiene entonces **(12 PUNTOS)**

$$\int \tan(x)\sec^2(x)dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2(x)}{2} + C_1$$

para la segunda integral, y siguiendo el mismo proceso que en el Problema III-a, **(12 PUNTOS)**

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C_2$$

reemplazando ambos resultados en $(***)$, y haciendo $C = C_1 + C_2$, se concluye que **(2 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \tan^3(x)dx = \frac{\tan^2(x)}{2} - \ln|\cos(x)| + C}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}dx$

Solución: hacemos la substitución $x = 4\tan(\theta)$, $dx = 4\sec^2(\theta)d\theta$ **(5 PUNTOS)**. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}dx &= 4\int \frac{4\sec^2(\theta)}{\sqrt{16\tan^2(\theta)+16}}d\theta \\ &= 16\int \frac{\sec^2(\theta)}{4\sqrt{\tan^2(\theta)+1}}d\theta \\ &= 4\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sqrt{\sec^2(\theta)}}d\theta \\ &= 4\int \sec(\theta)d\theta \quad \textbf{(10 PUNTOS)}\end{aligned}$$

de lo visto en clase

$$\int \sec(\theta)d\theta = \ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| + C$$

luego,

$$\int \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}dx = 4\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)| + C. \quad \textbf{(5 PUNTOS)}$$

Para volver a x, y recordando que $x = 4\tan(\theta)$, se tiene

$$x^2 = 16\tan^2(\theta) = 16\sec^2(\theta) - 16$$

de donde se llega a **(5 PUNTOS)**

$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+16}}{4}$$

y al reemplazar, se concluye que **(5 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}dx = 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}}{4} + \frac{x}{4}\right| + C}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx$

SOLUCIÓN: haciendo la substitución $x = 4\sec(\theta) \Longrightarrow dx = 4\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$ **(7 PUNTOS)**, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx &= \int \frac{4\sec(\theta)\tan(\theta)}{16\sec^2(\theta)\sqrt{16\sec^2(\theta)-16}}d\theta \\
&= \int \frac{\tan(\theta)}{16\sec(\theta)\sqrt{\tan^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \frac{1}{16\sec(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int \cos(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{16}\operatorname{sen}(\theta) + C \qquad \textbf{(17 PUNTOS)}
\end{aligned}$$

ahora debemos volver a x desde θ. Observemos que

$$x = 4\sec(\theta) \Longrightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$$

reemplazando, se concluye que **(6 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}}dx = \frac{\sqrt{x^2-16}}{16x} + C}$$

IV.- **(20 PUNTOS)**

(1) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-x}dx$

Solución: procedemos a descomponer la función racional, postulando la existencia de constantes reales A y B tales que

$$\frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

de donde se llega a que

$$x+2 = (x-1)A + xB$$

resolviendo el sistema, se obtiene $A = -2$ y $B = 3$ **(15 PUNTOS)**; por tanto,

$$\int \frac{x+2}{x^2-x}dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx$$

integrando, se concluye que **(5 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{x+2}{x^2-x}dx = -2\ln|x| + 3\ln|x-1| + C}$$

lo que al factorizar[1] mediante propiedad de logaritmos, da

$$\int \frac{x+2}{x^2-x}dx = \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x^2}\right| + C$$

[1] Este paso no es obligatorio.

(2) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}dx$

SOLUCIÓN: procedemos a descomponer la función racional, postulando la existencia de constantes reales A y B tales que

$$\frac{3x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

de donde se obtiene que

$$3x+2 = Ax + (A+B)$$

resolviendo, se llega que $A = 3$ y que $B = -1$ **(10 PUNTOS)**. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}dx &= 3\int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= 3\ln|x+1| - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx \ (****)\end{aligned}$$

para abordar la última integral, hacemos la substitución $u = x+1 \Longrightarrow du = dx$. Reemplazando, **(5 PUNTOS)**

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x+1} + C$$

reemplazando en $(****)$, y teniendo precaución con los signos, se concluye que **(5 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{3x+2}{(x+1)^2}dx = 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C}$$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3-4x-15}{x^2-x-6}dx$

SOLUCIÓN: observe que

$$\frac{x^3-4x-15}{x^2-x-6} = \frac{x^3-4x-15}{(x-3)(x+2)}$$

al hacer la división polinomial por Ruffini dos veces (dividiendo inicialmente por $x-3$) **(12 PUNTOS)**, se obtiene

$$\frac{x^3-4x-15}{x^2-x-6} = x+1+\frac{3}{x+2}$$

luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-4x-15}{x^2-x-6}dx &= \int \left(x+1+\frac{3}{x+2}\right)dx \\ &= \int x\,dx + \int dx + 3\int \frac{1}{x+2}dx \ \textbf{(3 PUNTOS)}\end{aligned}$$

e integrando **(5 PUNTOS)**,

$$\boxed{\int \frac{x^3-4x-15}{x^2-x-6}dx = \frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+2|+C}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$

SOLUCIÓN: observe que

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{x^2+2x-1}{x(x+1)(x-1)}$$

es aquí donde se postula la existencia de constantes reales A, B y C tales que

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

de donde se obtiene que

$$x^2 + 2x - 1 = A(x^2 - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 1)$$

al resolver, se obtiene $A = 1$, $B = -1$ y $C = 1$ **(15 PUNTOS)**. Por tanto

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x + 1} dx + \int \frac{1}{x - 1} dx$$

lo que al integrar, nos lleva a concluir que **(5 PUNTOS)**

$$\boxed{\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} dx = \ln |x| - \ln |x + 1| + \ln |x - 1| + C}$$

lo que, al simplificar (no obligatorio), nos da

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x} dx = \ln \left| \frac{x^2 - x}{x + 1} \right| + C$$

MOP/RVA
2 de Junio de 2020