UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cálculo Integral - 220181
Semestre I, 2020

GUÍA 5: VECTORES, RECTAS Y PLANOS

1. Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ de modo que el vector $\vec{p} = (2k, k)$ sea unitario.

2. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $||\vec{u}||$ y $||\vec{v}||$ cuando $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (5, 1)$.

3. Encuentre algún punto sobre el eje X de modo que su distancia al punto $A(2, -3)$ sea igual a 5.

4. Demuestre que los vectores $\vec{a} = (3, 6)$ y $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tienen la misma dirección.

5. Dado el vector $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determine los valores de a y b de modo que los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ y $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sean paralelos.

6. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ de modo que los vectores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ y $\vec{v} = (x^2, x, -3)$ sean perpendiculares.

7. Dados los vectores $\vec{a} = (3, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, -4, -3)$ y $\vec{c} = (-1, 2, 2)$, calcule (cuando sea posible):

   (a) $||\vec{c}||^2$
   (b) $||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||$
   (c) $\vec{a} \times \vec{b}$
   (d) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$
   (e) $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$
   (f) $||2\vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} - 5\vec{c}||^2$
   (g) $||(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}||$
   (h) $\left((2\vec{b} \times 3\vec{c}) + 3\vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

8. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(1, -2, 2)$. ¿Cuál es el valor del perímetro de la figura?

9. Calcule el ángulo de los vectores $\vec{u} = (1,1,4)$ y $\vec{v} = (-1,2,2)$.

10. Determine el vector proyección de $\vec{v} = (2,3,4)$ sobre $\vec{u} = (1,-1,0)$.

11. Sean los puntos $A(-1,-1,2)$, $B(2,1,1)$ y $C(k,-5,3)$.

    (a) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el triángulo ABC es rectángulo en A?

    (b) Determine las coordenadas del punto H, donde el segmento $\overline{AH}$ corresponde a la altura del triángulo ABC relativa al vértice A.

12. Determine el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u} = (2,3,-1)$, $\vec{v} = (2,0,5)$ y $\vec{w} = (0,3,4)$.

13. Sean los vectores $\vec{u} = (3,m,-2)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$ y $\vec{w} = (2,-1,2)$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea igual a 16.

14. Demuestre que las rectas

$$L-1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{8-z}{4}, \quad L_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{-4} = \frac{z+3}{-4}$$

    son paralelas. Encuentre la distancia entre ellas.

15. Considere los puntos $P(-2,1,3)$, $Q(1,3,3)$ y $R(2,-3,2)$. Encuentre:

    (a) la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$,

    (b) la ecuación del plano formado por los puntos P, Q y R,

    (c) la ecuación de una recta perpendicular al plano PQR que pase por el origen.

16. Considere las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases}, \; h \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

(a) encuentre el ángulo agudo que forman,

(b) determine, si existe, el punto donde L_1 y L_2 se intersectan.

17. Considere la recta $R : (y, z) = x(2, 2) + (3, 1)$ y el plano $\Pi :\ 4x - 4y + 2x - 7 = 0$.

    (a) pruebe que la recta y el plano son paralelos,

    (b) calcule la distancia de la recta al plano.

18. Determine el ángulo que forman los planos

$$\Pi_1 : 3x + y - z = -3 \quad \Pi_2 : x - y + 4z = 9$$

19. Encuentre una ecuación del plano que:

    (a) Contenga a la recta $L : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \\ z = 8 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ y que sea paralela al plano $\Pi_1 :\ 2x + 4y + 8z = 17$.

    (b) Pase por la línea de intersección de los planos $x - z = 1$, $y + 2x = 3$ y sea perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

20. Un auto recorre 5 km en dirección 45$^{\text{o}}$ noreste, posteriormente recorre 8 km hacia el este, y finalmente roma rumbo al sur por 50 km. ¿A qué distancia del punto de partida se encuentra el auto? Determine además el vector desplazamiento.

RVA/rva

6 de Julio de 2020