UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cálculo Integral - 220181
Semestre I, 2020

GUÍA 4: INTEGRACIÓN DEFINIDA

1. Calcule las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))dx$

(d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x^3}dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$

(f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^3(x)dx$

(g) $\displaystyle\int_\pi^\pi \operatorname{sen}(2x)\cos(2x)dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(t)}}dt$

(i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}dy$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x(x^2+4)^2}dx$

2. Encuentre la solución explícita de los siguientes PVI:

a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x^2-1} \\ y(2) = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dy} + 2y = 1 \\ y(0) = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ **(*)**

d) $\begin{cases} (1+x^4)dy + x(1+4y^2)dx = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0 \\ y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2\operatorname{sen}(x^2) \\ y(-2) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

3. **(*)** Para modelar la supervivencia del virus del SIDA en función del tiempo t (en años) en un conjunto dado de infectados, se asume que hay una fracción de pacientes, denotada por S_i, que no morirán por culpa del virus. Dicho parámetro se llama *fracción inmortal*. Para los demás, asumiremos que tienen una probabilidad k de sobrevivir por unidad de tiempo. Con esto, la fracción de sobrevivientes $S(t)$ estará modelada por la siguiente EDO separable

$$\frac{dS(t)}{dt} = -k(S(t) - S_i)$$

   (I) Obtenga la función $S(t)$ que modela la cantidad de sobrevivientes del virus, asumiendo que $S(0) = 1$, que $k = 0.1$, y $S_i = 0.1$.

   (II) ¿Cuál será la fracción de sobrevivientes al SIDA después de 1 año?

4. Calcule la carga $Q(t)$ en un capacitor infinito que está conectado a una FEM $E(t) = e^{3t}\sec(6t)$ y a una resistencia de 2 $[\Omega]$.

5. Ante la pregunta ¿cuántos peces puede realmente soportar un ecosistema?, Pierre François Verhulst propuso una ecuación diferencial ordinaria que describe la densidad peces por metro cúbico de agua de mar, $N(t)$, dentro de un ecosistema dado. Dicha EDO se llama **Ecuación Logística**, y es de la forma

$$\frac{dN}{dt} = rN\Big(1 - \frac{N}{K}\Big)$$

   donde el parámetro r es conocido como *la tasa intrínseca de incremento natural*, y K como *capacidad de carga* del ecosistema. Encuentre la función que describe la densidad de peces dentro de un cierto ecosistema cuando $r = \frac{1}{2}$, $K = 10^6$, y $N(0) = 5$. ¿Qué sucederá después que pase mucho tiempo, y asumiendo que las condiciones del ecosistema se mantienen sin cambios?

AYUDA: resuelva usando descomposición en suma de fracciones parciales.

6. Dibuje las regiones definidas por las curvas dadas, y calcule el área que ellas encierran.

   (a) $y = x + 1,\ y = 9 - x^2,\ x = -1,\ x = 2$

   (b) $y = \operatorname{sen}(x),\ y = e^x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$

   (c) $y = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x^2},\ x = 2$ **(*)**

   (d) $y = x^2,\ y^2 = x$

   (e) $y = \cos(x),\ y = 2 - \cos(x),\ x \in [0, 2\pi]$

   (f) $x = 2y^2,\ x = 4 + y^2$

7. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. De ser necesario, apóyese esbozando un gráfico de la situación.

   (a) $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ alrededor del eje x

   (b) $y = 1 - x^2,\ y = 0$; alrededor del eje x

   (c) $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$; alrededor del eje x

   (d) $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor del eje x

   (e) $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9$; alrededor del eje y

   (f) $y = \ln(y),\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$; alrededor del eje x

---