



**SUMATIVO 3-MÓDULO 1 CALCULO DIFERENCIAL. (220130-220164-220166)**  
**23 de Junio de 2020**

Nombre: ..... Rut:.....Sección:.....

Problema	1(25 puntos)	2 (30 puntos)	3 (20 puntos)	4 (25 puntos)	Total puntos	Nota (1-7)
Puntaje Obtenido						

**INSTRUCCIONES**

- HACER SOLAMENTE LOS EJERCICIOS QUE VIENEN ASIGNADOS, EN CASO CONTRARIO NO SERAN CONSIDERADOS.
- Escribir sus respuestas con letra clara y legible con lapiz pasta.
- Las respuestas deben venir debidamente justificadas.
- Cada una las hojas de respuestas debe venir con **Nombre y rut** y número de la pregunta.
- Al enviar la resolución de la evaluación, esta debe venir en un archivo pdf, de la siguiente forma: *NombreApellidoAlumno –CodigoAsignatura – seccion – sumativo1.pdf*
- Tiene 80 minutos para responder+ 20 minutos para el envío de archivo al correo [rvejar@ubiobio.cl](mailto:rvejar@ubiobio.cl).

**1. (25 puntos)**

a) Considere la función  $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definida por  $f(x) = \frac{2^{x+1} + 1}{2^x - 1}$

- 1) Encuentre analíticamente dominio y recorrido
- 2) Pruebe que  $f$  es inyectiva
- 3)  $f$  es sobreyectiva?
- 4)  $f$  es invertible?. Justifique. En caso de no serlo haga las restricciones adecuadas para definir una inversa

b) Considere la función  $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definida por  $f(x) = \log_2 \frac{4-x}{x-1}$

- 1) Encuentre analíticamente dominio y recorrido
- 2) Pruebe que  $f$  es inyectiva
- 3)  $f$  es sobreyectiva?
- 4)  $f$  es invertible?. Justifique. En caso de no serlo haga las restricciones adecuadas para definir una inversa

**2. (30 puntos) Resolver:**



A

B

a)  $\log_3(9^{x-1} + 3) = 1 + \log_3(3^{x-1} + 1)$

a)  $\log_2(4^x + 6) - 2 = \log_2(2^{x-2} + 3)$

b)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+y} - 1}{1 - \sqrt{1+y}}$

b)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z+1} - \sqrt[3]{z+1}}{z}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{3x+1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+3}{3x+1} \right)^{2-5x}$

3. (20 puntos) Estudie la continuidad de las siguientes funciones. En caso que encuentre alguna discontinuidad, clasifíquela:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}, & x < 1 \\ \log_3 \left( 6-x \right)^{\frac{15}{x}}, & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{3}}{x+3}, & x < -3 \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \leq x \leq 3 \\ \log_2 \left( \frac{x^2-5x+6}{x-3} \right), & x > 3 \end{cases}$$

4. (25 puntos) Resolver el siguiente problema:

a) Una familia se entera que su casa posee una invasión de termitas. Afortunadamente el vecino es matemático, y sabe que el crecimiento de la población de termitas se modela con la llamada *Función Logística*

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

donde  $N(t)$  es el número de termitas en el instante  $t$ ,  $N_0$  es la cantidad inicial de termitas,  $K$  es la llamada *capacidad de carga* de termitas de la casa, y  $r$  es la tasa de crecimiento de su población. Se sabe que  $r = \ln(4)$ , y que  $K = 10^8$  termitas. Al cuarto día de la invasión, se dieron cuenta que habían ya 1024 termitas. Determine

- la cantidad inicial de termitas que invadieron la casa
- la cantidad de termitas que habrá en 7 días



- iii) ¿Cuántas termitas habrán si se deja pasar mucho tiempo sin hacer nada?
- b) En un pueblo nuevo se comienza a desarrollar un crecimiento en la población de perros vagos. Una mujer que sabe mucha matemática, dijo que la cantidad de perros callejeros en el pueblo se puede modelar usando la llamada *Función Logística*

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

donde  $N(t)$  es el número de perros durante el mes  $t$ -ésimo,  $N_0$  es la cantidad inicial de perros,  $K$  es la llamada *capacidad de carga* de perros callejeros del pueblo, y  $r$  es la tasa de crecimiento de su población. Se sabe que  $r = \ln(2)$ , y que  $K = 10^6$  perros. Al quinto año de la invasión de perros, se dieron cuenta que habían ya 320 de ellos. Determine

- i) la cantidad inicial de perros que llegaron al pueblo
- ii) la cantidad de perros que habrán en 10 años
- iii) ¿Cuántos perros habrán por el pueblo si no se hace nada y se deja pasar mucho tiempo?