UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pauta Sumativo 3-Módulo 1 Calculo Diferencial. (220130-220164-220166)
16 de Junio de 2020

1. **(25 puntos)**

   a) Considere la función $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definida por $f(x) = \dfrac{2^{x+1}+1}{2^x - 1}$

   1) Encuentre analíticamente dominio y recorrido
   2) Pruebe que f es inyectiva
   3) f es sobreyectiva?
   4) f es invertible?. Justifique. En caso de no serlo haga las restricciones adecuadas para definir una inversa

   b) Considere la función $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definida por $f(x) = \log_2 \dfrac{4-x}{x-1}$

   1) Encuentre analíticamente dominio y recorrido
   2) Pruebe que f es inyectiva
   3) f es sobreyectiva?
   4) f es invertible?. Justifique. En caso de no serlo haga las restricciones adecuadas para definir una inversa

Solución parte (a):

1) observe que $f(x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$ excepto cuando

$$2^x - 1 = 0$$

es decir, cuando $x = 0$. Por lo tanto, **(2 p.)**

$$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} Rec(f) &= \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1}, x \in Dom(f) \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} : x = \log_2\left(\frac{y+1}{y-2}\right) \in Dom(f) \right\} \qquad \textbf{(*)} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{y+1}{y-2} > 0 \right\} \textbf{(3 p.)} \\ &= (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \textbf{(3 p.)} \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{Rec(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}$$

b) sean $a, b \in Dom(f) : f(a) = f(b)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \frac{2^{a+1}+1}{2^a-1} &= \frac{2^{b+1}+1}{2^b-1} \\ 2^{a+b+1} - 2^{a+1} + 2^b - 1 &= 2^{a+b+1} + 2^a - 2^{b+1} - 1 \\ 2^{a+1} + 2^a &= 2^{b+1} + 2^b \\ 2^a &= 2^b (\mathbf{5p.}) \end{aligned}$$

al aplicar $\log_2$ a ambos lados, se concluye que $a = b$, probando así la inyectividad de la función **(2 p.)**.

c) observe que **la función no es sobreyectiva**, puesto que

$$Rec(f) = (-\infty - 1) \cup (2, +\infty) \neq Cod(f) = \mathbb{R} \quad \mathbf{(4\ p.)}$$

d) del inciso anterior; al no ser sobreyectiva, se deduce que no es biyectiva. Por lo tanto, se concluye que **la función no es invertible (2 p.)**. Para que lo sea, debemos redefinir la función como sigue: **(2 p.)**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow (-\infty - 1) \cup (2, +\infty) \\ x &\longmapsto f(x) := \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} \end{aligned}$$

y del cálculo del recorrido (ver **(*)**), se concluye que la inversa estará dada por **(2 p.)**

$$\begin{aligned} f^{-1} : (-\infty - 1) \cup (2, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) := \log_2\left(\frac{y+1}{y-2}\right) \end{aligned}$$

Solución parte (b):

a) dada la presencia del logaritmo, se tendrá que

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \left\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \log_2\left(\frac{4-x}{x-1}\right) \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{4-x}{x-1} > 0\right\} \mathbf{(3\ p.)} \\ &= (1, 4) \mathbf{(3\ p.)} \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{Dom(f) = (1, 4)}$$

en cuanto al recorrido,

$$\begin{aligned} Rec(f) &= \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \log_2\left(\frac{x+1}{x-2}\right), x \in Dom(f) \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R} : x = \frac{4+2^y}{2^y+1} \in (1,4) \right\} \quad \textbf{(**)}(\textbf{3p}.) \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

es decir **(2 p.)**,

$$\boxed{Rec(f) = \mathbb{R}}$$

b) sean $a, b \in Dom(f) : f(a) = f(b)$. Luego,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \log_2 \frac{4-a}{a-1} &= \log_2 \frac{4-b}{b-1} \\ \frac{4-a}{a-1} &= \frac{4-b}{b-1} \\ 4b - 4 - ab + a &= 4a - 4 - ab + b \\ 4b - b &= 4a - a \\ a &= b \quad \textbf{(5 p.)} \end{aligned}$$

lo que termina por probar la inyectividad de f **(2 p.)**.

c) dado que $Rec(f) = Cod(f) = \mathbb{R}$, se concluye que **la función es sobreyectiva (4 p.)**.

d) al tener la inyectividad y sobreyectividad de f, se deduce que esta función admite inversa, la que estará dada por (ver **(**)**) **(3 p.)**

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow (1,4) \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) := \frac{4+2^x}{2^x+1} \end{aligned}$$

2. **(30 puntos)** Resolver:

A

a) $\log_3(9^{x-1}+3) = 1 + \log_3(3^{x-1}+1)$

b) $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x+1}$

B

a) $\log_2(4^x+6) - 2 = \log_2(2^{x-2}+3)$

b) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{z+1}-\sqrt[3]{z+1}}{z}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{2-5x}$

Solución parte A:

a) se tiene

$$\begin{aligned}
&\log_3(9^{x-1}+3) = 1+\log_2(3^{x-1}+1)\\
\Longleftrightarrow\ &\log_3(9^{x-1}+3) = \log_3(3)+\log_3(3^{x-1}+1)\\
\Longleftrightarrow\ &\log_3(9^{x-1}+3) = \log_3(3(3^{x-1}+1)) \quad \textbf{(3 p.)}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&9^{x-1}+3 = 3(3^{x-1}+1)\\
\Longleftrightarrow\ &3^{2x-2}+3 = 3^x+3\\
\Longleftrightarrow\ &3^{2x-2} = 3^x \quad \textbf{(3 p.)}
\end{aligned}$$

al comparar potencias de igual base, se obtiene

$$2x-2 = x \quad \textbf{(2 p.)}$$

de donde se concluye que $\boxed{x=2}$ **(2 p.)**.

b) al racionalizar tanto el numerador con el denominador,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}} &= \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}}\cdot\frac{(1+y)^{2/3}+(1+y)^{1/3}+1}{(1+y)^{2/3}+(1+y)^{1/3}+1} \quad \textbf{(4 p.)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y}{(1-\sqrt{1+y})((1+y)^{2/3}+(1+y)^{1/3}+1)}\cdot\frac{1+\sqrt{1+y}}{1+\sqrt{1+y}} \quad \textbf{(4 p.)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y(1+\sqrt{1+y})}{(y)((1+y)^{2/3}+(1+y)^{1/3}+1)}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(1+\sqrt{1+y})}{((1+y)^{2/3}+(1+y)^{1/3}+1)}\\
&= \frac{2}{3} \quad \textbf{(1 p.)}
\end{aligned}$$

es decir **(1 p.)**,

$$\boxed{\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{1-\sqrt{1+y}} = \frac{2}{3}}$$

c) se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x+1} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(2+\frac{5}{x})}{x(2+\frac{1}{x})}\right)^{3x+1} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^{3x+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{3x+1}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \frac{2\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{5}{2x}\right)^{\frac{2x}{5}}\right)^{\frac{15}{2}}\cdot 2}{2\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2} \quad \textbf{(3 p.)} \\
&= \frac{e^{\frac{15}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} \quad \textbf{(5 p.)}
\end{aligned}$$

es decir **(2 p.)**,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x+1} = e^6}$$

Solución parte B:

a) observe que $2 = \log_2 2^2$. Con esto, la ecuación se puede re-escribir como **(2 p.)**

$$\log_2\left(\frac{4^x+6}{4}\right) = \log_2(2^{x-2}+3)$$

es decir **(1 p.)**,

$$\frac{4^x+6}{4} = 2^{x-2}+3$$

lo que al reordenar nos da **(2 p.)**

$$2^{2x} - 2^x - 6 = 0$$

haciendo el cambio de variable $u = 2^x$, se llega a la ecuación **(3 p.)**

$$u^2 - u - 6 = 0$$

la que tiene por soluciones $u_1 = 3$ y $u_2 = -2$ **(1 p.)**. Dada la definición de u, nos vemos obligados a descartar u_2 para concluir que **(1 p.)**

$$\boxed{x = \log_2 3}$$

b) se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z+1}-\sqrt[3]{z+1}}{z} &= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{2}}-(z+1)^{\frac{1}{3}}}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-(z+1)^{\frac{1}{3}}}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{3}}\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}-(z+1)^{\frac{1}{3}}}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{3}}\left(\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)}{z}\cdot\frac{\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1}{\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1}\textbf{(3 p.)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{3}}\left((z+1)^{\frac{1}{3}}-1\right)}{z\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1}\cdot\frac{(z+1)^{\frac{2}{3}}+(z+1)^{\frac{1}{3}}+1}{(z+1)^{\frac{2}{3}}+(z+1)^{\frac{1}{3}}+1}\textbf{(3 p.)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{3}}\left(z+1-1\right)}{z\left(\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)\left((z+1)^{\frac{2}{3}}+(z+1)^{\frac{1}{3}}+1\right)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{z(z+1)^{\frac{1}{3}}}{z\left(\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)\left((z+1)^{\frac{2}{3}}+(z+1)^{\frac{1}{3}}+1\right)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(z+1)^{\frac{1}{3}}}{\left(\left((z+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right)\left((z+1)^{\frac{2}{3}}+(z+1)^{\frac{1}{3}}+1\right)}\textbf{(2 p.)}\\
&= \frac{1}{(1+1)(1+1+1)}
\end{aligned}
$$

es decir **(2 p.)**,

$$
\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z+1}-\sqrt[3]{z+1}}{z}=\frac{1}{6}}
$$

c) se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{2-5x} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+3}\right)^{5x-2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x+1\right)^{5x}}{\left(3x+3\right)^{5x}}\cdot\frac{\left(3x+1\right)^{-2}}{\left(3x+3\right)^{-2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}}{3x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}}\cdot\frac{3x\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{-2}}{3x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{5/3}}{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{-2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}}\\
&= \frac{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{5/3}}{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{5}}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{-2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2}}\ \textbf{(3 p.)}\\
&= \frac{e^{5/3}}{e^{5}}\ \textbf{(5 p.)}
\end{aligned}
$$

es decir **(2 p.)**,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+1}\right)^{2-5x} = e^{-\frac{10}{3}}}$$

3. **(20 puntos)** Estudie la continuidad de las siguientes funciones. En caso que encuentre alguna discontinuidad, clasifíquela:

a)

$$
f(x) = \begin{cases}
\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}, & x < 1\\[2ex]
\log_3\left(6-x\right)^{\frac{15}{x}}, & 1 \le x \le 3\\[2ex]
\dfrac{x^2-x-6}{x-3}, & x > 3
\end{cases}
$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{6+x}-\sqrt{3}}{x+3}, & x < -3 \\ \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \le x \le 3 \\ \\ \log_2\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right), & x > 3 \end{cases}$$

Solución parte (a): observemos que la función está bien definida en todo su dominio, excepto (posiblemente) en $x = 1$ y $x = 3$. En ambos casos se hace obligatorio determinar la existencia del límite mediante el cálculo de límites laterales. Empezando en $x = 1$, calculando el límite por la izquierda,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \textbf{(4 p.)} \end{aligned}$$

En cuanto al límite por la derecha,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \log_3 \Big(6-x\Big)^{\frac{15}{x}} \\ &= \log_3 \Big(6-1\Big)^{\frac{15}{1}} \\ &= 15\log_3(5). \quad \textbf{(2 p.)} \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que $f(1) = 15\log_3(5)$ **(2 p.)**. Dado que $f(1)$ existe pero los límites laterales no coinciden, se concluye que en $x = 1$ la función $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial de primera especie por tener salto finito **(2 p.)**. Estudiando ahora la continuidad en $x = 3$, el límite por la izquierda nos da

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \log_2 \Big(6-x\Big)^{\frac{15}{x}} \\ &= \log_2 \Big(6-3\Big)^{\frac{15}{3}} \\ &= 5\log_3(3) \\ &= 5 \quad \textbf{(2 p.)} \end{aligned}$$

que coincide con el valor que alcanza $f(x)$ cuando $x = 3$ **(2 p.)**. En cuanto al límite por la derecha,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3^+} (x+2)\\ &= 5 \quad \textbf{(4 p.)}\end{aligned}$$

es decir,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 5$$

lo que nos lleva a concluir que la función es continua cuando $x = 3$ **(2 p.)**.

Solución parte (b): observemos que la función está bien definida en todo su dominio, excepto (posiblemente) en $x = -3$ y $x = 3$. En ambos casos se hace obligatorio determinar la existencia del límite mediante el cálculo de límites laterales. Empezando en $x = -3$, calculando el límite por la izquierda,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^-} f(x) &= \lim_{x\to -3^-} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{3}}{x+3}\\ &= \lim_{x\to -3^-} \frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{3}}{x+3}\cdot\frac{\sqrt{6+x}+\sqrt{3}}{\sqrt{6+x}+\sqrt{3}}\\ &= \lim_{x\to -3^-} \frac{6+x-3}{(x+3)(\sqrt{6+x}+\sqrt{3})}\\ &= \lim_{x\to -3^-} \frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{6+x}+\sqrt{3})}\\ &= \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{\sqrt{6+x}+\sqrt{3}}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad \textbf{(4 p.)}\end{aligned}$$

En cuanto al límite por la derecha,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^+} f(x) &= \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}\\ &= \sqrt{9-9^2}\\ &= 0 \quad \textbf{(2 p.)}\end{aligned}$$

valor que coincide con el que toma $f(x)$ cuando $x = -3$ **(2 p.)**. Como $f(x)$ existe pero los límites laterales no coinciden en $x = -3$, se concluye ahí que $f(x)$ presenta una discontinuidad esencial de primera especie por tener salto finito **(2 p.)**. En cuanto a la continuidad en $x = 3$, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2}\\ &= \sqrt{9-9^2}\\ &= 0 \quad \textbf{(2 p.)}\end{aligned}$$

donde, de nuevo, se tiene que $f(3) = 0$ **(2 p.)**. En cuanto al límite por la derecha,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \log_2\left(\frac{x^2-5x+6}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3^+} \log_2\left(\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}\right)\\ &= \lim_{x\to 3^+} \log_2\Big(x-2\Big)\\ &= \log_2(3-2)\\ &= 0. \quad \textbf{(4 p.)}\end{aligned}$$

es decir, se tiene que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$$

lo que nos lleva a concluir que la función es continua cuando $x = 3$ **(2 p.)**.

4. **(25 puntos)** Resolver el siguiente problema:

   a) Una familia se entera que su casa posee una invasión de termitas. Afortunadamente el vecino es matemático, y sabe que el crecimiento de la población de termitas se modela con la llamada *Función Logística*

   $$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt}-1)}$$

   donde $N(t)$ es el número de termitas en el instante t, N_0 es la cantidad inicial de termitas, K es la llamada *capacidad de carga* de termitas de la casa, y r es la tasa de crecimiento de su población. Se sabe que $r = \ln(4)\left[\frac{1}{\text{día}}\right]$, y que $K = 10^8$ termitas. Al cuarto día de la invasión, se dieron cuenta que habían ya 1024 termitas. Determine

   i) la cantidad inicial de termitas que invadieron la casa
   ii) la cantidad de termitas que habrá en 7 días
   iii) ¿Cuántas termitas habrán si se deja pasar mucho tiempo sin hacer nada?

   Solución parte (i): del enunciado, $r = \ln(4)$ y $K = 10^8$. Para obtener la cantidad inicial de termitas, consideremos $t = 4$ y $N(t = 4) = 1024$. Despejando para N_0 en la ecuación logística, se obtiene **(6 p.)**

   $$N_0 = \frac{N(t)K}{Ke^{rt} + N(t)(1-e^{rt})}$$

reemplazando con los datos del enunciado **(1 p.)**,

$$N_0 = \frac{1024 \cdot 10^8}{10^8 e^{4\ln 4} + 1024(1 - e^{4\ln(4)})}$$

y como $e^{4\ln(4)} = 256$, se obtiene **(2 p.)**

$$N_0 = \frac{4 \cdot 10^8}{10^8 - 1020} \approx 4$$

lo que nos lleva a concluir que fueron 4 termitas las que iniciaron la invasión **(1 p.)**. Ese dato nos servirá para obtener la cantidad de termitas al séptimo día de la invasión.

Solución parte (ii): se tiene

$$N(t=7) = \frac{10^8 \cdot 4 \cdot e^{7\ln(4)}}{10^8 + 4(e^{7\ln(4)} - 1)} \approx 6549$$

es decir, habrán aproximadamente unos 6549 termitas invadiendo la casa **(5 p.)**.

Solución parte (iii): lo que se pide es equivalente a calcular el límite **(2 p.)**

$$\lim_{t\to\infty} N(t).$$

Para resolver, y dado que $ln(4) > 0$, nos valdremos del siguiente límite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{rt}} = 0$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0e^{rt}}{e^{rt}\left(\frac{K}{e^{rt}} + N_0(1 - \frac{1}{e^{rt}})\right)} \quad \textbf{(4 p.)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0}{\left(\frac{K}{e^{rt}} + N_0(1 - \frac{1}{e^{rt}}\right)} \\
&= \frac{\lim_{t\to\infty} KN_0}{\left(\lim_{t\to\infty} \frac{K}{e^{rt}} + \lim_{t\to\infty} N_0(1 - \frac{1}{e^{rt}}\right)} \\
&= \frac{KN_0}{0 + N_0(1 - 0)} \textbf{(2 p.)} \\
&= K
\end{aligned}$$

es decir, si no se hace nada y se deja pasar mucho tiempo, habrán $K = 10^8$ termitas aterrorizando y destruyendo la casa **(2 p.)**.

b) En un pueblo nuevo se comienza a desarrollar un crecimiento en la población de perros vagos. Una mujer que sabe mucha matemática, dijo que la cantidad de perros callejeros en el pueblo se puede modelar usando la llamada *Función Logística*

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

donde $N(t)$ es el número de perros durante el mes t-ésimo, N_0 es la cantidad inicial de perros, K es la llamada *capacidad de carga* de perros callejeros del pueblo, y r es la tasa de crecimiento de su población. Se sabe que $r = \ln(2) \left[\frac{1}{\text{año}}\right]$, y que $K = 10^6$ perros. Al quinto año de la invasión de perros, se dieron cuenta que habían ya 320 de ellos. Determine

i) la cantidad inicial de perros que llegaron al pueblo

ii) la cantidad de perros que habrán en 10 año

iii) ¿Cuántos perros habrán por el pueblo si no se hace nada y se deja pasar mucho tiempo?

Solución parte (i): del enunciado, $r = \ln(2)$ y $K = 10^6$. Para obtener la cantidad inicial de perros, consideremos $t = 5$ y $N(t = 5) = 320$. Despejando para N_0 en la ecuación logística, se obtiene **(6 p.)**

$$N_0 = \frac{N(t)K}{Ke^{rt} + N(t)(1 - e^{rt})}$$

reemplazando con los datos del enunciado **(1 p.)**,

$$N_0 = \frac{320 \cdot 10^6}{10^6 e^{5\ln 2} + 320(1 - e^{5\ln(2)})}$$

y como $e^{5\ln(2)} = 32$, se obtiene **(2 p.)**

$$\boxed{N_0 = \frac{10^6}{10^5 - 31} \approx 10}$$

lo que nos lleva a concluir que fueron 10 perros los que iniciaron la invasión **(1 p.)**. Ese dato nos servirá para obtener la cantidad de perros al décimo año de la invasión.

Solución parte (ii): se tiene

$$N(t = 10) = \frac{10^6 \cdot 10 \cdot e^{10\ln(2)}}{10^6 + 10(e^{10\ln(2)} - 1)} \approx 10136$$

es decir, habrán aproximadamente unos 10136 perros deambulando por el pueblo al décimo año **(5 p.)**.

Solución parte (iii): lo que se pide es equivalente a calcular el límite **(2 p.)**

$$\lim_{t\to\infty} N(t).$$

Para resolver, y dado que $ln(2) > 0$, nos valdremos del siguiente límite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{rt}} = 0$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0e^{rt}}{K + N_0(e^{rt}-1)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0e^{rt}}{e^{rt}\left(\frac{K}{e^{rt}} + N_0(1-\frac{1}{e^{rt}})\right)} \qquad \textbf{(4 p.)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{KN_0}{\left(\frac{K}{e^{rt}} + N_0(1-\frac{1}{e^{rt}}\right)} \\
&= \frac{\lim_{t\to\infty} KN_0}{\left(\lim_{t\to\infty}\frac{K}{e^{rt}} + \lim_{t\to\infty} N_0(1-\frac{1}{e^{rt}}\right)} \\
&= \frac{KN_0}{0 + N_0(1-0)} \qquad \textbf{(2 p.)} \\
&= K
\end{aligned}$$

es decir, si no se hace nada y se deja pasar mucho tiempo, habrán $K = 10^6$ perros deambulando por el pueblo **(2 p.)**.