Pauta-Certamen 2-Módulo 2. Calculo Diferencial (220130-220164-220166)
Martes 3 de Agosto de 2020

Problema	1(30 puntos)	2 (40 puntos)	3 (30 puntos)	Total puntos	Nota (1-7)

1. *a*) Usar el Teorema del Valor Medio, para probar que $f(x) = x - \ln(1+x) > 0$, para todo $x > 0$.
   `(15 puntos)`

   Desarrollo

   Por el Teorema del Valor Medio, existe $c_x \in]0, x[$ tal que
   $$f(x) - f(0) = f'(c_x) \cdot x.$$
   5 puntos

   Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, podemos extender f a una función continua tal que $f(0) = 0$.

   Como $f'(c_x) = 1 - \dfrac{1}{1 + c_x} > 0$, $f(x) > 0$. 5 puntos
   $$\therefore \boxed{f(x) = x - \ln(1+x) > 0, \ \forall x > 0.}$$
   5 puntos

   □

   b) Determinar una función cúbica, es decir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
   que satisfaga las siguientes condiciones
   - Máximo relativo $(3, 3)$
   - Mínimo relativo $(5, 1)$
   - Punto de inflexión $(4, 2)$

   `Indicación:` $f'(x) = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$ `si` $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ `y` $\alpha \neq \beta$.
   `(15 puntos)`

   Desarrollo

   Nótese que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 3$ y un mínimo relativo en $x = 5$, $f'(x) = 3a(x-3)(x-5)$, $f'(x) = 3ax^2 - 24ax + 45a$. 2 puntos

   Comparando los coeficiente en las dos expresiones de $f'(x)$, tenemos $b = -12a$ y $c = 45a$. 2 puntos

   Por lo tanto, $\boxed{f(x) = a(x^3 - 12x^2 + 45x) + d}$. 2 puntos

   Ahora, $f''(x) = a(6x - 24)$. Entonces, se alcanza un <u>punto de inflexión</u> en $x = 4$ tal como se menciona en las hipótesis. 1 punto

   Como el máximo relativo y el mínimo relativo están en $x = 2$ y $x = 5$ respectivamente, $a > 0$.
   Como $f(3) = 3$,
   $$54a + d = 3 \tag{1}$$
   1 punto

   Como $f(5) = 3$,
   $$50a + d = 1 \tag{2}$$
   1 punto

   Al restar la ecuación (2) a la ecuación (1), se tiene que $a = \dfrac{1}{2}$ y $d = -24$. 2 puntos

   Reemplazando los valores anteriores, se tiene que

$$\therefore \boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 12x^2 + 45x) - 24}$$

2 puntos

No es difícil ver que se verifica la hipótesis sobrante $f(4) = 2$. 2 puntos

$\square$

c) Usar el Teorema del Valor Medio, para probar que$f(x) = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) \geq 0$, para todo $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

`(15 puntos)`

Por el Teorema del Valor Medio, existe $c_x \in]0, x[$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(c_x) \cdot x.$$

5 puntos

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, podemos extender f a una función continua tal que f(0)=0.

Como $f'(c_x) = \cancel{\cos(c_x)} - \cancel{\cos(c_x)} + c_x \operatorname{sen}(c_x) > 0$, $f(x) > 0$. 5 puntos

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}(x) - x\cos(x) > 0, \ \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

5 puntos

d) Determinar una función cúbica, es decir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

que satisfaga las siguientes condiciones

- Máximo relativo $(2, 4)$
- Mínimo relativo $(4, 2)$
- Punto de inflexión $(3, 3)$

`Indicación:` $f'(x) = 3a(x - \alpha)(x - \beta)$ `si` $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ `y` $\alpha \neq \beta$.

`(15 puntos)`

Desarrollo

Nótese que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Como $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 3$ y un mínimo relativo en $x = 5$, $f'(x) = 3a(x - 2)(x - 4)$, $f'(x) = 3ax^2 - 18ax + 24a$. 2 puntos

Comparando los coeficiente en las dos expresiones de $f'(x)$, tenemos $b = -9a$ y $c = 24a$. 2 puntos

Por lo tanto, $\boxed{f(x) = a(x^3 - 9x^2 + 24x) + d}$. 2 puntos

Ahora, $f''(x) = 3a(2x - 6)$. Entonces, se alcanza un punto de inflexión en $x = 3$ tal como se menciona en las hipótesis. 1 punto

Como el máximo relativo y el mínimo relativo están en $x = 2$ y $x = 4$ respectivamente, $a > 0$.

Como $f(4) = 4$,

$$20a + d = 4 \tag{3}$$

1 punto

Como $f(4) = 2$,

$$16a + d = 2 \tag{4}$$

1 punto

Al restar la ecuación (4) a la ecuación (3), se tiene que $a = \frac{1}{2}$ y $d = -6$. 2 puntos

Reemplazando los valores anteriores, se tiene que

$$\therefore \boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 9x^2 + 24x) - 6}$$

2 puntos

No es difícil ver que se verifica la hipótesis sobrante $f(3) = 3$. 2 puntos

$\square$

2. Encontrar dominio, intervalos de crecimiento-decrecimiento, máximos-mínimos locales o globales, intervalos de concavidad-convexidad de las funciones asignadas y bosquejar sus gráficas.

   a) $f(x) = x(2x^2 + 3x - 12)$ `(15 puntos)`

   Desarrollo

   Para detectar los máximos relativos, los mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, derivamos $f(x)$:

   $$f'(x) = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$$

   2 puntos

   Entonces, $(-2, f(-2)) = (-2, 20)$ es el máximo relativo y $(1, f(1)) = (1, -7)$ es el mínimo relativo. 2 puntos

   Los intervalos de crecimiento son $]-\infty, -2[$ y $]1, +\infty[$. 2 puntos

   El intervalo de decrecimiento es $]-2, 1[$. 1 punto

   Para obtener los intervalos de concavidad, calculamos la segunda derivada

   $$f''(x) = 6(2x + 1)$$

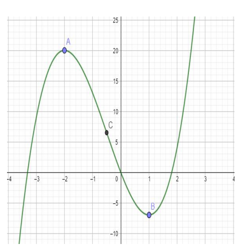
   2 puntos

   El cambio de concavidad se produce en el punto de inflexión $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$. 1 punto

   El intervalo de concavidad hacia abajo es $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$. 1 punto

   El intervalo de concavidad hacia arriba es $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. 1 punto

Figura 1: Gráfica de $y = f(x)$, el punto A es el máximo relativo, el punto B es el mínimo relativo y el punto C es el punto de inflexión.



3 puntos

□

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5x^2 - 20}$ `(25 puntos)`

Desarrollo

Claramente $y = f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$. 2 puntos

Hay una asíntota vertical dada por $y = \dfrac{1}{5} = 0,2$. 1 punto

Para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (5x^2 - 20) - x^2 \cdot 10x}{(5x^2 - 20)^2} \\ &= \frac{\cancel{10x^3} - 40x - \cancel{10x^3}}{(5x^2 - 20)^2} \\ &= -\frac{40x}{25(x-4)^2} = -\frac{8x}{5(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

2 puntos

Los intervalos de crecimiento serán $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$. 2 puntos

Los intervalos de decrecimiento serán $]0, 2[$, $]2, +\infty[$. 2 puntos

Hay un máximo relativo dado por $(0, 0)$. 1 punto

Para encontrar los intervalos de concavidad, calculamos la segunda derivada de $f(x)$

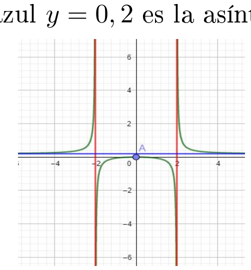
$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{8}{5} \cdot \frac{1 \cdot (x^2-4)^2 - x \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} \\ &= -\frac{8}{5} \cdot \frac{x^2 - 4 - 4x^2}{(x^2-4)^3} \\ &= \frac{8}{5} \cdot \frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3} \end{aligned}$$

2 puntos

Los intervalos de concavidad hacia arriba son $]-\infty, -2[$ y $]2, +\infty[$. 2 puntos El intervalo de concavidad hacia abajo es $]-2, 2[$. 1 punto

No hay puntos de inflexión.

Figura 2: Gráfica de $y = f(x)$, 2 puntos el punto A es el máximo relativo, 2 puntos las líneas rojas $x = \pm 2$ son las asíntotas verticales 4 puntos y la línea azul $y = 0,2$ es la asíntota horizontal. 2 puntos



$\square$

c) $f(x) = x(2x^2 - 3x - 120)$ `(15 puntos)`

Desarrollo

Para detectar los máximos relativos, los mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = 6(x^2 - x - 20) = 6(x+4)(x-5)$$

2 puntos

Entonces, $(-4, f(-4)) = (-4, 304)$ es el máximo relativo y $(5, f(5)) = (5, -425)$ es el mínimo relativo.
2 puntos

Los intervalos de crecimiento son $]-\infty, -4[$ y $]5, +\infty[$. 2 puntos

El intervalo de decrecimiento es $]-4, 5[$. 1 punto

Para obtener los intervalos de concavidad, calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6(2x - 1)$$

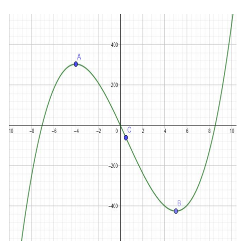
2 puntos

El cambio de concavidad se produce en el punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, \frac{121}{2}\right)$. 1 punto

El intervalo de concavidad hacia abajo es $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$. 1 punto

El intervalo de concavidad hacia arriba es $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. 1 punto

Figura 3: Gráfica de $y = f(x)$, el punto A es el máximo relativo, el punto B es el mínimo relativo y el punto C es el punto de inflexión.



3 puntos

$\square$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{3x^2 - 27}$ `(25 puntos)`

Desarrollo

Claramente $y = f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x = -3$ y $x = 3$. 2 puntos

Hay una asíntota vertical dada por $y = \dfrac{1}{3} = 0,\overline{3}$. 1 punto

Para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculamos la derivada de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (3x^2 - 27) - x^2 \cdot 6x}{(3x^2-27)^2} \\ &= \frac{\cancel{6x^3} - 54x - \cancel{6x^3}}{(3x^2-27)^2} \\ &= -\frac{54x}{9(x^2-9)^2} = -\frac{6x}{(x^2-9)^2} \end{aligned}$$

2 puntos

Los intervalos de crecimiento serán $]-\infty,-3[$, $]-3,0[$. 2 puntos

Los intervalos de decrecimiento serán $]0,3[$, $]3,+\infty[$. 2 puntos

Hay un máximo relativo dado por $(0,0)$. 1 punto

Para encontrar los intervalos de concavidad, calculamos la segunda derivada de $f(x)$

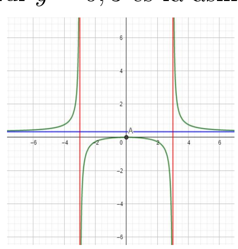
$$\begin{aligned} f''(x) &= -6 \cdot \frac{1 \cdot (x^2-9)^2 - x \cdot 2(x^2-9) \cdot 2x}{(x^2-9)^4} \\ &= -6 \cdot \frac{x^2 - 9 - 4x^2}{(x^2-9)^3} \\ &= 18 \cdot \frac{x^2+3}{(x^2-9)^3} \end{aligned}$$

2 puntos

Los intervalos de concavidad hacia arriba son $]-\infty,-3[$ y $]3,+\infty[$. 2 puntos El intervalo de concavidad hacia abajo es $]-3,3[$. 1 punto

No hay puntos de inflexión.

Figura 4: Gráfica de $y = f(x)$, 2 puntos el punto A es el máximo relativo, 2 puntos las líneas rojas $x = \pm 3$ son las asíntotas verticales 4 puntos y la línea azul $y = 0,\overline{3}$ es la asíntota horizontal. 2 puntos



□

3. a) Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular sin tapa, de un litro de capacidad. Hallar el radio y la altura que ha de tener este recipiente para que en su construcción se haga uso de la menor cantidad de material.

   (15 puntos)

Desarrollo

Sean r y h, respectivamente, el radio y la altura en cm del recipiente que se quiere construir.
Se desea que tenga 1 litro=1000 cm^3 de capacidad.
Entonces, $\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.
Se desea encontrar r y h de modos que la cantidad de material usado sea mínima.
La cantidad de material usado viene por el área de la base, es decir, πr^2, más el área del lado cilíndrico, $2\pi r h$.
Entonces, la cantidad de material usado viene dada por

$$C(r) = \pi r^2 + 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \frac{1000}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}.$$

3 puntos

Encontraremos r tal que $C(r)$ sea un mínimo.
Para ello, calculamos

$$C'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2}.$$

Resolvemos $C'(r) = 0$ y obtenemos $r^3 = \dfrac{1000}{\pi}$. De aquí, $r = \dfrac{10}{\pi^{\frac{1}{3}}}$. 3 puntos
Calcularemos $C''(r)$ en el valor de r recién encontrado, para saber si se alcanza un máximo o un mínimo en ese valor.

$$C''(r) = 2\pi + \frac{4000}{r^3} > 0.$$

3 puntos

Por lo tanto, $C(r)$ alcanza su mínimo valor en

$$\boxed{r = \frac{10}{\pi^{\frac{1}{3}}} \approx 6,83\ cm.}$$

Para tal valor de r la altura viene dada por

$$\boxed{h = \frac{10}{\pi^{\frac{1}{3}}} \approx 6,83\ cm.}$$

Luego, para gastar la menor cantidad de metal, el radio basal y la altura deberían ser, aproximadamente, de 6,83 cm de longitud. 6 puntos

$\square$

b) Mostrar que el rectángulo de mayor área, que puede inscribirse en una circunferencia es un cuadrado.
`Indicación: Suponer que uno de los lados del rectángulo es paralelo al eje` x `y que la circunferencia es de centro` $(0,0)$ `y radio` R.

`(15 puntos)`

<u>Desarrollo</u>

Nótese que al fijar un lado horizontal del rectángulo inscrito en una circunferencia centrada en $(0,0)$ y radio R, sus cuatro vértices vienen dados por $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$ y $(-x, \sqrt{R^2 - x^2})$, $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$ y $(-x, \sqrt{R^2 - x^2})$ donde $x \in]0, R[$.
Para encontrar el rectángulo de mayor tamaño inscrito en una circunferencia centrada en $(0,0)$ y radio R, hay que encontrar x tal que

$$A(x) = 4x\sqrt{R^2 - x^2}$$

Buscamos $x \in]0, R[$ tal que $A(x)$ sea un máximo.

5 puntos

Para ello, calculamos $A'(x) = 4\sqrt{R^2 - x^2} - 4 \cdot \dfrac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.
Entonces, $A'(x) = 0$ es equivalente a

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

5 puntos

Para ver si en el reciente valor de x en encuentra un máximo o un mínimo, calculamos

$$A''(x) = -4 \cdot \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - 4 \cdot \frac{2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \dfrac{x^3}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2}.$$

Claramente,$A''(x) < 0$, para todo $x \in]0, R[$, en particular $A''\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) < 0$. Por lo tanto, $A(x)$ alcanza su máximo valor en $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

3 puntos

Luego, el largo de la base del rectángulo más grande inscrito es $\sqrt{2}R$. El largo de cada uno de los otros lados es

$$2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2}R.$$

El rectángulo más grande que se puede inscribir en la circunferencia de radio R es un cuadrado de lado $\sqrt{2}R$.
Como R fue tomado arbitrariamente y el centro de la circunferencia podría haber sido cualquier otro, el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia, es un cuadrado. 2 puntos

□

c) Se desea cercar una parcela rectangular de 200 m^2 de una finca, aprovechando un muro ya existente, de modo que en ese lado no es necesaria una cerca. ¿Cómo debe ser ese rectángulo para que el costo de la cerca sea mínimo?

(15 puntos)

Desarrollo

Sean x e y, respectivamente, el ancho y el largo en *metros* de la parcela que se quiere construir.
Se desea que tenga que cercar 200 m^2 por lo que $xy = 200$. De aquí, $y = \dfrac{200}{x}$.
La cantidad de metros de cerca viene dada por $C = 2x + y$. Esta puede escribirse como

$$C(x) = 2x + \frac{200}{x}$$

3 puntos

Ahora, buscamos x tal que $C(x)$ sea un mínimo.
Para ello, calculamos

$$C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}.$$

Resolvemos $C'(x) = 0$ y obtenemos $x^2 = 100$. De aquí, $x = 10$. 3 puntos
Calcularemos $C''(x)$ en el valor de x recién encontrado, para saber si se alcanza un máximo o un mínimo en $x = 10$.

$$C''(x) = \frac{400}{x^3} > 0.$$

3 puntos

Por lo tanto, $C(x)$ alcanza su mínimo valor en el ancho

$$\boxed{x = 10m.}$$

El largo vendrá dado por

$$\boxed{y = 20m.}$$

Luego, para gastar la menor cantidad de cerca, la parcela ha de tener 10 metros de ancho y 20 metros de largo. 6 puntos

□

d) Mostrar que el triángulo de mayor área, que puede inscribirse en una circunferencia es un triángulo equilátero. `Indicación: Suponer que uno de los lados del triángulo es paralelo al eje` x `y que la circunferencia es de centro` $(0,0)$ `y radio` R.

`(15 puntos)`

Desarrollo

Nótese que al fijar un lado horizontal del triángulo inscrito en una circunferencia centrada en $(0,0)$ y radio R, sus dos primeros vértices vendrán dados por $(x, -\sqrt{R^2-x^2})$ y $(-x, -\sqrt{R^2-x^2})$, donde $x \in [0, R]$. Como el triángulo más grande que se pude encontrar, con un lado fijo, inscrito en una circunferencia, es un triángulo isósceles (por tener la mayor altura), su tercer vértice vendrá dado por $(0, R)$.

Para encontrar el triángulo de mayor tamaño inscrito en una circunferencia centrada en $(0,0)$ y radio R, hay que encontrar x tal que

$$A(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x(R + \sqrt{R^2-x^2})$$

Buscamos x tal que $A(x)$ sea un máximo.

5 puntos

Para ello, calculamos $A'(x) = R + \sqrt{R^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Entonces, $A'(x) = 0$ es equivalente a

$$R\sqrt{R^2-x^2} = 2x^2 - R^2.$$

Elevamos al cuadrado y tenemos,

$$\cancel{R^4} - R^2x^2 = 4x^4 - 4R^2x^2 + \cancel{R^4}.$$

De aquí, $3R^2x^2 = 4x^4$. Como $x^2 \neq 0$, podemos cancelarlo, obteniendo

$$x^2 = \frac{3}{4}R^2.$$

Como $x > 0$, $\boxed{x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R.}$

5 puntos

Para ver si en el reciente valor de x en encuentra un máximo o un mínimo, calculamos

$$A''(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} - \frac{2x\sqrt{R^2-x^2} + \dfrac{x^3}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}.$$

Claramente,$A''(x) < 0$, para todo $x \in]0, R[$, en particular $A''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right) < 0$. Por lo tanto, $A(x)$ alcanza su máximo valor en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$.

3 puntos

Luego, el largo de la base del triángulo más grande inscrito es $\sqrt{3}R$. Por el Teorema de Pitágoras, el largo de cada uno de los otros lados es

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}R^2 + \frac{9}{4}R^2} = \sqrt{3}R.$$

El triángulo más grande que se puede inscribir en la circunferencia de radio R es un triángulo equilátero de lado $\sqrt{3}R$.

Como R fue tomado arbitrariamente y el centro de la circunferencia podría haber sido cualquier otro, el triángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia, es un triángulo equilátero. 2 puntos

$\square$