Pauta Sumativo 2-Módulo 1 Calculo Diferencial. (220130-220164-220166)
26 de Mayo de 2020

1. **(45 ptos)** Sean las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por :

A	B
$f(x) = x^2 - 3x\,,\ g(x) = \dfrac{4-x}{x+3}$ y $h(x) = \lvert x-3\rvert - 2x.$	$f(x) = 5x - x^2\,,\ g(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$ y $h(x) = \lvert x+3\rvert - 3x.$

a) Determine el valor de $\dfrac{(f\cdot g)(1) - 5\frac{g}{f}(-2)}{h(3) - 4g(-5)}$:

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{(f\cdot g)(1) - 5\frac{g}{f}(-2)}{h(3) - 4g(-5)} &= \frac{f(1)\cdot g(1) - 5\dfrac{g(-2)}{f(-2)}}{-6 - 4\cdot\frac{9}{-2}} \\
&= \frac{(-2)\cdot\frac{3}{4} - 5\cdot\dfrac{6}{10}}{-6+18} \\
&= \frac{-9}{24} = -\frac{3}{8} \quad \textbf{(10 Ptos)}
\end{aligned}$$

b) Exprese h como una función por tramo.

Solución:

$h(x) = \begin{cases} -(x-3) - 2x, & x < 3 \\ (x-3) - 2x, & x \geq 3 \end{cases}$ **(4 Ptos)**

Luego, $h(x) = \begin{cases} -3x + 3, & x < 3 \\ -x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$ **(3 Ptos)**

c) Simplifique al maximo $\dfrac{g(4+h) - g(4)}{h}$, $h \neq 0$:

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{g(4+h) - g(4)}{h} &= \frac{\dfrac{4-4-h}{4+h+3} - 0}{h},\ h \neq 0 \\
&= \frac{-h}{h(h+7)} \\
&= -\frac{1}{h+7} \quad \textbf{(8 Ptos)}
\end{aligned}$$

d) Determine el recorrido de f:

Solución:

Primero debemos calcular el recorrido de f, para ver si es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}
y \in Rec(f) &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\, y = x^2 - 3x \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\, (x - 3/2)^2 = y + \frac{9}{4}\\
&\Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\, |x - 3/2| = \sqrt{y + \frac{9}{4}} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\, x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{y + \frac{9}{4}}\\
&\Leftrightarrow y + \frac{9}{4} \geq 0, \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow y \geq -\frac{9}{4} \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rec(f) = [-\frac{9}{4}, +\infty[$. **(2 Ptos)**

e) Defina la compuesta entre g y f $(g \circ f)$. Estableciendo claramente su dominio y ecuación de definición.
Solución:

$$\begin{aligned}
Dom(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} / \, x \in Dom(f),\ f(x) \in Dom(g)\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / \, x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x \neq -3\}\\
&= \{x \in \mathbb{R} / \, x^2 - 3x + 3 \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}\}\\
&= \mathbb{R} \quad \textbf{(5 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$

Luego, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, / \, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3x) = \dfrac{4 - x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 3}$ **(5 Ptos)**

a) Determine el valor de $\dfrac{(f\cdot g)(1)-5\dfrac{g}{f}(-2)}{h(3)-4g(-5)}$:
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{(f\cdot g)(1)-5\dfrac{g}{f}(-2)}{h(3)-4g(-5)} &= \frac{f(1)\cdot g(1)-5\dfrac{g(-2)}{f(-2)}}{-3-4\cdot-\frac{3}{8}}\\
&= \frac{4\cdot\frac{3}{2}-5\dfrac{0}{-14}}{-3+\frac{3}{2}}\\
&= \frac{12}{-3}=-4 \quad \textbf{(10 Ptos)}
\end{aligned}$$

b) Exprese h como una función por tramo.
Solución:
$h(x)=\begin{cases} -(x+3)-3x, & x<-3\\ (x+3)-3x, & x\geq -3\end{cases}$ **(4 Ptos)**

Luego, $h(x)=\begin{cases} -4x-3, & x<-3\\ -2x+3, & x\geq -3\end{cases}$ **(3 Ptos)**

c) Simplifique al maximo $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}$, $h\neq 0$:
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{g(4+h)-g(4)}{h} &= \frac{\dfrac{6+h}{-1-h}+6}{h},\ h\neq 0\\
&= \frac{-5h}{h(-1-h)}\\
&= \frac{5}{1+h} \quad \textbf{(8 Ptos)}
\end{aligned}$$

d) Determine el recorrido de f:
Solución:
Primero debemos calcular el recorrido de f, para ver si es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}
y\in Rec(f) &\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ y=5x-x^2 \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ (x-5/2)^2=-y+\frac{25}{4}\\
&\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ |x-5/2|=\sqrt{-y+\frac{25}{4}} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\ x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{-y+\frac{25}{4}}\\
&\Leftrightarrow -y+\frac{25}{4}\geq 0, \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow y\leq\frac{25}{4} \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rec(f)=]-\infty,\frac{25}{4}]$. **(2 Ptos)**

e) Defina la compuesta entre g y f $(g \circ f)$. Estableciendo claramente su dominio y ecuación de definición.
Solución:

$$\begin{aligned} Dom(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R} / \, x \in Dom(f),\, f(x) \in Dom(g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \, x \in \mathbb{R},\, 5x - x^2 \neq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \, 5x - x^2 - 3 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{13}\right) \right\} \quad \textbf{(5 Ptos)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$

Luego, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - x^2) = \dfrac{-x^2 + 5x + 2}{x^2 - 5x + 3}$ **(5 Ptos)**

2. **(25 puntos)** Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por:

A

$$f(x) \ = \sqrt{\frac{3-x}{2x+3}}.$$

B

$$f(x) \ = \sqrt{\frac{x+2}{2-3x}}.$$

a) Determinar el dominio máximo A de definición de f.
Solución:
$A = Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{3-x}{2x+3} \geq 0 \right\} =]-\frac{3}{2}, 3]$. **(7 Ptos)**

b) Demostrar que f es inyectiva sobre A.
Demostración.
Sean $a, b \in]-\frac{3}{2}, 3]$:

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(b) \\
\sqrt{\frac{3-a}{2a+3}} &= \sqrt{\frac{3-b}{2b+3}} \quad /()^2 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
\frac{3-a}{2a+3} &= \frac{3-b}{2b+3} \quad /(2a+3)(2b+3) \\
(3-a)(2b+3) &= (3-b)(2a+3) \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
6b+9-2ab-3a &= 6a+9-2ab-3b \\
-9a &= -9b \\
a &= b \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva. **(2 Ptos)**

c) Defina la función inversa de f, denotada f^{-1}, haciendo la restircciones necesarias para su existencia. Estableciendo claramente su dominio y ecuación de definición.
Solución:
Primero debemos calcular el recorrido de f, para ver si es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}
y \in Rec(f) &\Leftrightarrow x \in A,\ y = \sqrt{\frac{3-x}{2x+3}} \quad /()^2 \\
&\Leftrightarrow x \in A,\ y \geq 0,\ y^2 = \frac{3-x}{2x+3} \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
&\Leftrightarrow x \in A,\ y \geq 0,\ x = \frac{3-3y^2}{2y^2+1} \\
&\Leftrightarrow y \geq 0,\ y \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow y \geq 0, \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rec(f) = [0, +\infty[$. **(1 Ptos)**
Luego, f no es sobreyectiva, para que lo sea, se restringe el codominio al recorrido de f.
Así, $f :] - \frac{3}{2}, 3] \to [0, +\infty[$ es sobreyectiva, por tanto biyectiva.
Luego, f tiene función inversa y es $f^{-1} : [0, +\infty[\to] - \frac{3}{2}, 3]$, tal que:
$f^{-1} = \dfrac{3-3x^2}{2x^2+1}$ **(5 Ptos)**

a) Determinar el dominio máximo A de definición de f.
Solución:
$A = Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x+2}{2-3x} \geq 0 \right\} = [-2,\, 2/3[.$ **(7 Ptos)**

b) Demostrar que f es inyectiva sobre A.
Demostración.
Sean $a,\, b \in [-2,\, 2/3[$:

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(b) \\
\sqrt{\frac{a+2}{2-3a}} &= \sqrt{\frac{b+2}{2-3b}} \quad /()^2 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
\frac{a+2}{2-3a} &= \frac{b+2}{2-3b} \quad /(2-3a)(2-3b) \\
(a+2)(2-3b) &= (b+2)(2-3a) \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
2a - 3ab + 4 - 6b &= 2b - 3ab + 4 - 6a \\
8a &= 8b \\
a &= b \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva. **(2 Ptos)**

c) Defina la función inversa de f, denotada f^{-1}, haciendo la restircciones necesarias para su existencia. Estableciendo claramente su dominio y ecuación de definición.
Solución:
Primero debemos calcular el recorrido de f, para ver si es sobreyectiva:

$$\begin{aligned}
y \in Rec(f) &\Leftrightarrow x \in A,\, y = \sqrt{\frac{x+2}{2-3x}} \quad /()^2 \\
&\Leftrightarrow x \in A,\, y \geq 0,\, y^2 = \frac{x+2}{2-3x} \quad \textbf{(2 Ptos)} \\
&\Leftrightarrow x \in A,\, y \geq 0,\, x = \frac{2y^2-2}{1+3y^2} \\
&\Leftrightarrow y \geq 0,\, y \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow y \geq 0, \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rec(f) = [0, +\infty[.$ **(1 Ptos)**
Luego, f no es sobreyectiva, para que lo sea, se restringe el codominio al recorrido de f.
Así, $f : [-2,\, 2/3[\to [0, +\infty[$ es sobreyectiva, por tanto biyectiva.
Luego, f tiene función inversa y es $f^{-1} : [0, +\infty[\to [-2,\, 2/3[$, tal que:
$f^{-1} = \dfrac{2x^2-2}{1+3x^2}$ **(5 Ptos)**

3. **(20 puntos)** Se estima que el número de horas-trabajador requeridas para distribuir las boletas de cobros de cierto servicio al $x\,\%$ de las familias en cierta comunidad está dado por la función $f(x) = \frac{600x}{300-x}$

   a) Cual es el dominio de f.
   Solución: El dominio de f es: $D = \mathbb{R} - \{300\}$ **(3 Ptos)**

   b) ¿Para qué valores de x tiene $f(x)$ una interpretación practica para este contexto?
   Solución: Para el contexto, el dominio de f es: $D_* = [0,\ 100]$ **(3 Ptos)**

   c) ¿Cuántas horas-trabajador se necesitaron para distribuir las boletas de cobros al primer $40\,\%$ de las familias?
   Solución:
   Se tiene que: $f(40) = \dfrac{600 \cdot 40}{300 - 40} = \dfrac{24000}{260} = \dfrac{1200}{13} \approx 92,3$
   Se necesitarón 92,3 hora aproximadamente para cubrir el $40\,\%$ de la población. **(6 Ptos)**

   d) ¿Qué porcentaje de familias había recibido boletas de cobros cuando se completaron 100 horas trabajador?
   Solución:
   Se tiene que: $f(x) = 100 \Rightarrow \dfrac{600 \cdot x}{300 - x} = 100 \Rightarrow 600x = 30000 - 100x \Rightarrow x \approx 42,86$
   El $42{,}9\,\%$ aproximadamente de las familias habrán recibido las boletas de cobro de servicios cunado se completaron las 100 horas-trabajador. **(8 Ptos)**