Sumativo 1-Módulo Mod 2 Calculo Diferencial. (220130-220164-220166)
14 de Julio de 2020

1. **(25 ptos)** Determine:

a) Usando la definición, la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{x+5}$, $\quad x \neq -5$

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h+5}-\dfrac{x}{x+5}}{h} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x+5)-x(x+h+5)}{h(x+h+5)(x+5)} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+5x+hx+5h-x^2-xh-5x}{h(x+h+5)(x+5)} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{5h}{h(x+h+5)(x+5)} = \lim_{h\to 0}\frac{5}{(x+h+5)(x+5)} = \frac{5}{(x+5)^2} && \boxed{3 \text{ puntos}}
\end{aligned}
$$

b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables en todo punto. Calcular $F'(1)$ si

$$F(x) = \frac{f(x+g(x))}{x^2}, \quad g(1) = 1, \quad g'(1) = 2, \quad f(2) = 2, \quad f'(2) = 1.$$

Solución

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= = \frac{(f(x+g(x)))'\cdot x^2 - f(x+g(x))\cdot (x^2)'}{(x^2)^2}, \quad \text{por regla del cuociente} && \boxed{4 \text{ puntos}}\\
F'(x) &= \frac{f'(x+g(x))\cdot(1+g'(x))\cdot x^2 - 2x\cdot f(x+g(x))}{x^4}, \quad \text{por regla de la cadena} && \boxed{5 \text{ puntos}}\\
F'(1) &= f'(1+g(1))\cdot(1+g'(1)) - 2f(1+g(1)) && \boxed{2 \text{ puntos}}\\
F'(1) &= 3f'(2) - 2f(2) = -1 && \boxed{2 \text{ puntos}}
\end{aligned}
$$

c) Usando la definición de derivada, hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Solución

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2}}{h} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{1-(x+h)^2}-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1-x^2-2xh-h^2-1+x^2}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})} && \boxed{3 \text{ puntos}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(-2x-h)}{h(\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} && \boxed{3 \text{ puntos}}
\end{aligned}
$$

d) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables en todo punto. Calcular $G'(1)$ si

$$G(x) = \frac{f(x^2+g(x))}{g(x)}, \quad g(1) = 2, \quad g'(1) = 3, \quad f(3) = -2, \quad f'(3) = 5.$$

Solución

$$\begin{aligned}
G'(x) &= = \frac{(f(x^2+g(x)))'\cdot g(x) - f(x^2+g(x))\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{por regla del cuociente} \quad \boxed{4 \text{ puntos}}\\
G'(x) &= \frac{f'(x^2+g(x))\cdot(2x+g'(x))\cdot g(x) - f(x^2+g(x))\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{por regla de la cadena} \quad \boxed{5 \text{ puntos}}\\
G'(1) &= \frac{f'(1+g(1))\cdot(2+g'(1))\cdot g(1) - f(1+g(1))\cdot g'(1)}{g^2(1)}, \quad \text{por regla de la cadena} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\\
G'(1) &= \frac{10f'(3)-3f(3)}{4} = \frac{56}{4} = 14. \quad \boxed{2 \text{ puntos}}
\end{aligned}$$

2. **(20 ptos)** Determine los valores de a y b, para que la función f sea continua y derivable en x_0, donde:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3+ax^2+1, & x \le 2 \\ x^2+bx-2, & x > 2 \end{cases} \qquad x_0 = 2$

Solución

Calculemos los límites laterales en $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
L_+ &= \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2+bx-2 = 2+2b \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\\
L_- &= \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^3+ax^2+1 = 9+4a = f(2) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}
\end{aligned}$$

Para que f sea continua en $x_0 = 2$ debe cumplirse que $L_+ = L_- = f(2)$, esto es, $\boxed{2b-4a=7 \quad (1) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}}$.

Calculemos las derivadas laterales en $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
f'_+(x) &= (x^2+bx-2)' = 2x+b \Rightarrow f'_+(2) = 4+b \quad \boxed{4 \text{ puntos}}\\
f'_-(x) &= (x^3+ax^2+1)' = 3x^2+2ax \Rightarrow f'_-(2) = 12+4a \quad \boxed{4 \text{ puntos}}
\end{aligned}$$

Para que f sea derivable en $x_0 = 2$ debe cumplirse que las derivadas laterales sean iguales, es decir, $\boxed{4a-b=-8 \quad (2) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $a = -\frac{9}{4}$ y $b = -1$ para que la función sea continua y derivable en $x_0 = 2$ $\boxed{4 \text{ puntos}}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^3+ax^2+7, & x \le -2 \\ x^2+bx-3, & x > -2 \end{cases} \qquad x_0 = -2$

Solución

Calculemos los límites laterales en $x_0 = -2$

$$\begin{aligned}
L_+ &= \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} x^2+bx-3 = 1-2b \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\\
L_- &= \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} x^3+ax^2+7 = 4a-1 = f(-2) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}
\end{aligned}$$

Para que f sea continua en $x_0 = -2$ debe cumplirse que $L_+ = L_- = f(-2)$, esto es, $\boxed{2a+b=1 \quad (1) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}}$.

Calculemos las derivadas laterales en $x_0 = -2$

$$\begin{aligned}
f'_+(x) &= (x^2+bx-3)' = 2x+b \Rightarrow f'_+(-2) = -4+b \quad \boxed{4 \text{ puntos}}\\
f'_-(x) &= (x^3+ax^2+7)' = 3x^2+2ax \Rightarrow f'_-(-2) = 12-4a \quad \boxed{4 \text{ puntos}}
\end{aligned}$$

Para que f sea derivable en $x_0 = -2$ debe cumplirse que las derivadas laterales sean iguales, es decir, $\boxed{4a+b=16 \quad (2) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $a = \frac{15}{2}$ y $b = -14$ para que la función sea continua y derivable en $x_0 = -2$ $\boxed{4 \text{ puntos}}$.

3. **(30 ptos)** Halle la derivada de las siguientes funciones:

Parte A

a) $f(z) = (z^2+3)\sqrt{4-z^2}$

b) $\dfrac{dg}{dt}$, donde $g(t) = \ln \dfrac{x+t^2-1}{x+t^2+1}$

c) $h(x) = (3x+1)^{\sec x^2}$.

Parte B

a) $f(z) = \dfrac{\sqrt{-1+z^2}}{z^2+1}$

b) $\dfrac{df}{dt}$, donde $f(t) = e^{(x+t^2)\cdot \sin(x+t^2+1)}$

c) $f(x) = (2x+5)^{\cos^2(7x)}$

Solución Parte A

a) Por Regla del Producto y Regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dz} &= \frac{d}{dz}\Big((z^2+3)\sqrt{4-z^2}\Big)\\
&= \left(\frac{d}{dz}(x^2+3)\right)\sqrt{4-z^2} + (z^2+3)\frac{d}{dz}\sqrt{4-z^2} \quad \boxed{\text{4 puntos}}\\
&= 2z\sqrt{4-z^2} + (z^2+3)\frac{1}{2}(4-z^2)^{-\frac{1}{2}}(-2z)\\
&= \frac{2z(4-z^2) - z(z^2+3)}{\sqrt{4-z^2}} \quad \boxed{\text{3 puntos}}\\
&= \frac{-3z^3+5z}{\sqrt{4-z^2}} \quad \boxed{\text{2 puntos}}
\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dz}\Big((z^2+3)\sqrt{4-z^2}\Big) = \frac{z(5-3z^2)}{\sqrt{4-z^2}}} \quad \boxed{\text{1 puntos}}$$

b) Usando regla de la cadena y del cociente,

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\ln\frac{x+t^2-1}{x+t^2+1}\right)\\
&= \frac{x+t^2+1}{x+t^2-1}\left(\frac{(x+t^2-1)'(x+t^2+1) - (x+t^2-1)(x+t^2+1)'}{(x+t^2+1)^2}\right) \quad \boxed{\text{4 puntos}}\\
&= \frac{2t(x+t^2+1) - 2t(x+t^2-1)}{(x+t^2-1)(x+t^2+1)} \quad \boxed{\text{3 puntos}}\\
&= \frac{4t}{(x+t^2-1)(x+t^2+1)} \quad \boxed{\text{2 puntos}}
\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{x+t^2-1}{x+t^2+1}\right) = \frac{4t}{(x+t^2-1)(x+t^2+1)}} \boxed{\text{1 puntos}}$$

c) Aplicando logaritmo a la función $h(x) = (3x+1)^{\sec(x^2)}$,

$$\ln h(x) = \ln(3x+1)^{\sec(x^2)}$$

$$\ln h(x) = \sec(x^2)\ln(3x+1) \quad \boxed{\text{2 puntos}}$$

derivando a ambos lados, y por Regla de la Cadena,

$$\frac{1}{h(x)}h'(x) = \frac{d}{dx}\Big(\sec(x^2)\ln(3x+1)\Big)$$

al aplicar la Regla del Producto a lado derecho,

$$\frac{1}{h(x)}h'(x) = 2x\sec(x^2)\tan(x^2)\ln(3x+1) + 3\frac{\sec(x^2)}{3x+1} \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

factorizando,

$$\frac{1}{h(x)}h'(x) = \sec(x^2)\Big(2x\tan(x^2) + \frac{3}{3x+1}\Big) \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

y pasando $h(x) = (3x+1)^{\sec(x^2)}$ a lado derecho, se concluye que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(3x+1)^{\sec(x^2)} = 2\sec(x^2)(3x+1)^{\sec(x^2)}\Big(2x\tan(x^2) + \frac{3}{3x+1}\Big)} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

Solución Parte B:

a) Usando Regla del Cociente y Regla de la Cadena, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{-1+z^2}}{z^2+1}\right) &= \frac{\sqrt{-1+z^2}'(z^2+1) - \sqrt{-1+z^2}(z^2+1)'}{(z^2+1)^2} \quad \boxed{4 \text{ puntos}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(-1+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2z)(z^2+1) - 2z\sqrt{-1+z^2}}{(z^2+1)^2} \quad \boxed{3 \text{ puntos}}\\ &= \frac{z(z^2+1) - 2z(-1+z^2)}{\sqrt{-1+z^2}(z^2+1)^2}\\ &= \frac{3z - z^3}{\sqrt{-1+z^2}(z^2+1)^2} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{-1+z^2}}{z^2+1}\right) = \frac{z(3-z^2)}{\sqrt{-1+z^2}(z^2+1)^2}} \quad \boxed{1 \text{ puntos}}$$

b) Aplicando Regla de la Cadena y Regla del Producto,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt}\Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big)\\ &= \Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big)\cdot\Big((x+t^2)'\sin(x+t^2+1) + (x+t^2)(\sin(x+t^2+1))'\Big) \quad \boxed{4 \text{ puntos}}\\ &= \Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big)\cdot\Big((2t)\cdot\sin(x+t^2+1) + (x+t^2)\cdot\cos(x+t^2+1)\cdot(2t)\Big) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\\ &= 2t\Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big)\cdot\Big(\sin(x+t^2+1) + (x+t^2)\cos(x+t^2+1)\Big) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}\end{aligned}$$

es decir

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big) = 2t\Big(e^{(x+t^2)\cdot\sin(x+t^2+1)}\Big)\cdot\Big(\sin(x+t^2+1) + (x+t^2)\cos(x+t^2+1)\Big)} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

c) Aplicando logaritmo natural a ambos lados de $f(x) = (2x+5)^{\cos^2(7x)}$

$$\ln f(x) = \ln(2x+5)^{\cos^2(7x)}$$

$$\iff \ln f(x) = \cos^2(7x)\ln(2x+5) \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

derivando a ambos lados, y por Regla del Producto y Regla de la Cadena

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = (\cos^2(7x))'\ln(2x+5) + \cos^2(7x)\Big(\ln(2x+5)\Big)' \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

$$\iff \frac{1}{f(x)}f'(x) = -14\cos(7x)\sin(7x)\ln(2x+5) + 2\frac{\cos^2(7x)}{2x+5} \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

y al factorizar y pasar $f(x)$ al lado derecho, se concluye que

$$\boxed{\frac{d}{dx}(2x+5)^{\cos^2(7x)} = -2\cos(7x)(2x+5)^{\cos^2(7x)}\left(7\sin(7x)\ln(2x+5) - \frac{\cos(7x)}{2x+5}\right)} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

4. **(25 ptos)**

a) Dada la curva de ecuación $x^3 + 3x^2y + 4y^2 + 5y + 7 = 0$ y el punto de la curva $P(2,-3)$. Determine la recta tangente y normal a la curva en el punto $P(2,-3)$.

Solución: observe que $P(2,-3)$ pertenece a la curva entregada en el enunciado. Derivando implícitamente, se obtiene 1 puntos

$$3x^2 + 6xy + 3x^2y' + 8yy' + 5y' = 0$$

y al despejar para y' y factorizar

$$y' = \frac{-3x(x+2y)}{3x^2+8y+5} \quad \boxed{6 \text{ puntos}}$$

al evaluar en $P(2,-3)$ se obtiene la pendiente de la recta tangente a la recta en dicho punto

$$m = y'\Big|_{(2,-3)} = -\frac{24}{7} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

así, se concluye que la recta tangente a la curva estará dada por

$$\boxed{y = -\frac{24}{7}x + \frac{27}{7}} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

en cuanto a la recta normal, su pendiente estará dada por

$$m_N = -\frac{1}{m} = \frac{7}{24} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

por tanto, dicha recta tendrá ecuación

$$\boxed{y = \frac{7}{24}x - \frac{43}{12}} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

b) La ecuación de movimiento de una partícula es $s(t) = t^4 - 3t^3 + 2t^2 + t$, donde s está dado en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración como funciones de t. Encuentre la aceleración y la velocidad después de 3 segundos.

Solución: la velocidad estará dada por

$$s'(t) = 4t^3 - 9t^2 + 4t + 1 \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

y la aceleración por

$$s''(t) = 12t^2 - 18t + 4 \quad \boxed{3 \text{ puntos}}$$

luego,

$$s'(3) = 4\cdot 3^3 - 9\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1 = \boxed{40} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

$$s''(3) = 12\cdot 3^2 - 18\cdot 3 + 4 = \boxed{58} \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

c) Considere la curva de la ecuación $2xy - 3x^2y^3 - 7x - 2 = 0$ y el punto $P(-1, 1)$. Determine las rectas normal y tangente a la curva en el punto $P(-1, 1)$.

Solución: observe que el punto $P(-1, 1)$ está en la curva presentada en el enunciado. Al derivar implícitamente, se obtiene 1 puntos,

$$2y + 2xy' - 6xy^3 - 9x^2y^2y' - 7 = 0$$

y al despejar para y'

$$y' = \frac{6xy^3 - 2y + 7}{2x - 9x^2y^2} \quad \text{6 puntos}$$

así, la pendiente m de la recta tangente a la curva en $P(-1, 1)$ estará dada por

$$m = y'\Big|_{(-1,1)} = \frac{1}{11} \quad \text{2 puntos}$$

luego, la recta tangente será descrita por la expresión

$$\boxed{y = \frac{1}{11}x + \frac{12}{11}} \quad \text{2 puntos}$$

por otro lado, la pendiente de la recta normal será

$$m_N = -\frac{1}{m} = -11 \quad \text{2 puntos}$$

se concluye que la recta normal será

$$\boxed{y = -11x - 10} \quad \text{2 puntos}$$

d) Considere una partícula que se mueve en una línea horizontal. La distancia desde la posición inicial a la partícula en el tiempo está dado por $s(t) = t^3 - 3t^2 - 45t - 21$. Calcular la velocidad y la aceleración como función del tiempo. Determine la aceleración cuando la velocidad es nula.

Solución: la velocidad estará dada por

$$s'(t) = 3t^2 - 6t - 45 \quad \text{3 puntos}$$

y la aceleración por

$$s''(t) = 6t - 6 \quad \text{3 puntos}$$

cuando la velocidad es nula se tendrá que

$$s'(t) = 3t^2 - 6t - 45 = 0$$

lo que sucede cuando $t = 5$ y cuando $t = -3$. Dado el contexto físico, debemos tomar $t = 5$ para calcular la aceleración 3 puntos. Al reemplazar, se llega a

$$\boxed{s''(t = 5) = 24} \quad \text{1 puntos}$$