UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sumativo 1-Módulo 1 Calculo Diferencial. (220130-220164-220166)
05 de Mayo de 2020

Nombre:...**Rut:**.................**Sección:**.......

Problema	1(puntos)	2 (puntos)	3 (puntos)	Total puntos	Nota (1-7)
Puntaje Obtenido					

1. Demuestre las siguientes propiedades, usando la axiomática en $\mathbb{R}$. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

   a) $(ba)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, a \neq 0, b \neq 0$
   Solución: Por una parte, tenemos que el inverso multiplicativo de ba es $(ba)^{-1}$. Por otro lado, probaremos que el inverso aditivo de ba es $b^{-1}a^{-1}$, es decir, $(ba)\cdot(b^{-1}a^{-1}) = 1$ **(2 Ptos)**. En efecto,

$$\begin{aligned}
(ba)\cdot(b^{-1}a^{-1}) &= (b\cdot a)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1}), \quad \text{por notación } ab = a\cdot b \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= (b\cdot a)\cdot(a^{-1}\cdot b^{-1}), \quad \text{por conmutatividad} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= [(b\cdot a)\cdot a^{-1}]\cdot b^{-1}, \quad \text{por asociatividad} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= [b\cdot(a\cdot a^{-1})]\cdot b^{-1}, \quad \text{por asociatividad} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= (b\cdot 1)\cdot b^{-1}, \quad \text{por inverso multiplicativo} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= b\cdot b^{-1}, \quad \text{por neutro multiplicativo}\\
&= 1, \quad \text{por inverso multiplicativo} \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

   Luego el inverso multiplicativo de ba es $(ba)^{-1}$ y $b^{-1}a^{-1}$, por la unicidad del inverso multiplicativo, concluimos que $(ba)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. **(1 Ptos)**

   b) $-(a-b) = b-a$
   Solución: Por una parte, tenemos que el inverso aditivo de $a-b$ es $-(a-b)$. Por otro lado, probaremos que el inverso aditivo de $a-b$ es $b-a$, es decir, $(a-b)+(b-a) = 0$ **(2 Ptos)**. En efecto,

$$\begin{aligned}
(a-b)+(b-a) &= (a+(-b))+(b+(-a)), \quad \text{por notación } a-b = a+(-b) \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= [(a+(-b))+b]+(-a), \quad \text{por asociatividad} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= [a+((-b)+b)]+(-a), \quad \text{por asociatividad} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= (a+0)+(-a), \quad \text{por inverso aditivo} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= a+(-a), \quad \text{por neutro aditivo} \quad \textbf{(2 Ptos)}\\
&= 0, \quad \text{por inverso aditivo} \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

   Luego el inverso aditivo de $(a-b)$ es $-(a-b)$ y $b-a$, por la unicidad del inverso aditivo, concluimos que $-(a-b) = b-a$ **(1 Ptos)**

2. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones

   a) $|5x+10| = |-x+4|$
   Solución:

$$\begin{aligned}
|5x+10| = |-x+4| &\Leftrightarrow 5x+10 = -x+4 \quad \vee \quad 5x+10 = x-4 \quad \textbf{(3 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow 6x = -6 \quad \vee \quad 4x = -14 \quad \textbf{(3 Ptos)}\\
&\Leftrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{7}{2} \quad \textbf{(2 Ptos)}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $S = \left\{-1, -\frac{7}{2}\right\}$ **(2 Ptos)**

b) $|-3x+9| = |x-11|$
Solución:

$$\begin{aligned} |-3x+9| = |x-11| &\Leftrightarrow -3x+9 = x-11 \quad \vee \quad -3x+9 = -x+11 \quad \textbf{(3 Ptos)} \\ &\Leftrightarrow -4x = -20 \quad \vee \quad -2x = 2 \quad \textbf{(3 Ptos)} \\ &\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -1 \quad \textbf{(2 Ptos)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S = \{-1, 5\}$ **(2 Ptos)**

c) $\sqrt{11-2x} = -x+4$
Solución: $11-2x \geq 0 \wedge -x+4 \geq 0 \Rightarrow 11-2x = (-x+4)^2$ **(2 Ptos)**

$$\begin{aligned} 11-2x \geq 0 \wedge -x+4 \wedge 0 \quad &\wedge \quad 11-2x = x^2-8x+16 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\ -2x \geq -11 \,/\cdot(-1) \wedge -x \wedge -4 \,/\cdot(-1) \quad &\wedge \quad x^2-6x+5 = 0 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\ 2x \leq 11 \ \wedge x \leq 4 \quad &\wedge \quad (x-1)\cdot(x-5) = 0 \\ x \leq \frac{11}{2} \ \wedge x \leq 4 \quad &\wedge \quad [x=1 \vee x=5] \quad \textbf{(2 Ptos)} \end{aligned}$$

Luego, la solución es $S = \{1\}$ **(2 Ptos)**

d) $\sqrt{13-3x} = 5-x$
Solución: $13-3x \geq 0 \wedge 5-x \geq 0 \Rightarrow 13-3x = (5-x)^2$ **(2 Ptos)**

$$\begin{aligned} 13-3x \geq 0 \wedge 5-x \wedge 0 \quad &\wedge \quad 13-3x = x^2-10x+25 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\ -3x \geq -13 \,/\cdot(-1) \wedge -x \wedge -5 \,/\cdot(-1) \quad &\wedge \quad x^2-7x+12 = 0 \quad \textbf{(2 Ptos)} \\ 3x \leq 13 \ \wedge x \leq 5 \quad &\wedge \quad (x-3)\cdot(x-4) = 0 \\ x \leq \frac{13}{3} \ \wedge x \leq 5 \quad &\wedge \quad [x=3 \vee x=4] \quad \textbf{(2 Ptos)} \end{aligned}$$

Luego, la solución es $S = \{3, 4\}$ **(2 Ptos)**

e) $\dfrac{2-x}{x+5} \leq \dfrac{3x}{2x-3}$
Solución:

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+5} \leq \frac{3x}{2x-3} &\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+5} - \frac{3x}{2x-3} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2-x)(2x-3) - 3x(x+5)}{(x+5)(2x-3)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x-6-2x^2+3x-3x^2-15x}{(x+5)(2x-3)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-5x^2-8x-6}{(x+5)(2x-3)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x^2+8x+6}{(x+5)(2x-3)} \geq 0 \quad \textbf{(8 Ptos)} \end{aligned}$$

El discriminante de la ecuación cuadrática $5x^2+8x+6 = 0$ es $D = 8^2 - 4\cdot 5\cdot 6 = -56 < 0$, luego la ecuación tiene raíces complejas. Entonces la expresión $5x^2+8x+6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. La expresión se indetermina cuando $(x+5)(2x-3) = 0$, esto es, $x = -5$ o $x = \frac{3}{2}$ **(2 Ptos)**.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
$5x^2+8x+6$	$+$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5x^2+8x+6}{(x+5)(2x-3)}$	$+$	$-$	$+$

(6 Ptos)

Por lo tanto, $S =]-\infty, -5[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[= \{x : x < -5 \vee x > \frac{3}{2}\}$ **(2 Ptos)**

f) $\dfrac{x+7}{6-x} \leq \dfrac{4x}{3+7x}$
Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2-x}{x+5} \leq \frac{3x}{2x-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+7}{6-x} - \frac{4x}{3+7x} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x+7)(3+7x) - 4x(6-x)}{(6-x)(3+7x)} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3x + 7x^2 + 21 + 49x - 24x + 4x^2}{(6-x)(3+7x)} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{11x^2 + 28x + 21}{(6-x)(3+7x)} \leq 0 \quad \textbf{(8 Ptos)}
\end{aligned}$$

El discriminante de la ecuación cuadrática $11x^2+28x+21 = 0$ es $D = 28^2 - 4 \cdot 11 \cdot 21 = -140 < 0$, luego la ecuación tiene raíces complejas. Entonces la expresión $11x^2 + 28x + 21 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. La expresión se indetermina cuando $(6-x)(3+7x) = 0$, esto es, $x = 6$ o $x = -\frac{3}{7}$. **(2 Ptos)**

	$(-\infty, -\frac{3}{7})$	$(-\frac{3}{7}, 6)$	$(6, +\infty)$
$11x^2 + 28x + 21$	$+$	$+$	$+$
$6-x$	$+$	$+$	$-$
$3+7x$	$-$	$+$	$+$
$\frac{11x^2+28x+21}{(6-x)(3+7x)}$	$-$	$+$	$-$

(6 Ptos)

Por lo tanto, $S =]-\infty, -\frac{3}{7}[\cup]6, +\infty[= \{x : x < -\frac{3}{7} \vee x > 6\}$ **(2 Ptos)**

g) $|5x+7| \geq -4x+3$
Solución:

$$\begin{aligned}
|5x+7| \geq -4x+3 \quad &\Leftrightarrow \quad -4x+3 < 0 \vee [-4x+3 \geq 0 \wedge (5x+7 \geq -4x+3 \quad \vee \quad 5x+7 \leq 4x-3)] \\
&\Leftrightarrow \quad -4x < -3 \vee [-4x \geq -3 \wedge (9x \geq -4 \quad \vee \quad x \leq -10)] \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{3}{4} \vee [x \leq \frac{3}{4} \wedge (x \geq -\frac{4}{9} \quad \vee \quad x \leq -10)] \quad \textbf{(8 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S =]-\infty, -10] \cup [-\frac{4}{9}, +\infty[$. **(4 Ptos)**

h) $|-3x+1| \geq 2x+9$
Solución:

$$\begin{aligned}
|-3x+1| \geq 2x+9 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+9 < 0 \vee [2x+9 \geq 0 \wedge (-3x+1 \geq 2x+9 \quad \vee \quad -3x+1 \leq -2x-9)] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < -9 \vee [2x \geq -9 \wedge (-5x \geq 8 \quad \vee \quad -x \leq -10)] \\
&\Leftrightarrow \quad 2x < \frac{-9}{2} \vee [x \geq \frac{-9}{2} \wedge (x \leq -\frac{8}{5} \quad \vee \quad x \geq 10)] \quad \textbf{(8 Ptos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S =]-\infty, -\frac{8}{5}] \cup [10, +\infty[$. **(4 Ptos)**

3. Resolver los siguientes problemas

a) Un avión pequeño puede transportar menos de 2554 kilos de equipaje y correo. El correo del día pesa 300 kilos. Si cada pasajero trae 23 kilos de equipaje, ¿cuál es el mayor número posible de pasajeros

que se pueden llevar?
Solución: Sea x la cantidad de pasajeros, resolvemos la inecuación:

$$\begin{aligned} 300 + 23 \cdot x &< 2554 \\ 23 \cdot x &< 2554 - 300 \\ x &< \frac{2254}{23} = 98 \quad \textbf{(12 Ptos)} \end{aligned}$$

De donde, el mayor número posible de pasajeros que puede llevar el avión es 97 pasajeros. **(3 Ptos)**

b) Una persona quiere gastar no más de \$11000. en la farmacia. Gastará \$4500 en un alcohol gel y quiere comprar mascarillas por \$1500 cada una. Determinar la mayor cantidad de mascarillas que puede comprar.
Solución: Sea x la cantidad de mascarillas, resolvemos la inecuación:

$$\begin{aligned} 4500 + 1500 \cdot x &< 11000 \\ 1500 \cdot x &< 11000 - 4500 \\ x &< \frac{6500}{1500} = \frac{13}{3} = 4{,}3333 \quad \textbf{(12 Ptos)} \end{aligned}$$

De donde, la mayor cantidad de mascarillas que puede comprar es 4 mascarillas.