

# SOBRE LA CONTROVERSIA DEL PREMIO AL RIESGO<sup>1</sup>

CARLOS OYARZÚN CABEZAS<sup>2</sup>.

## RESUMEN

Este trabajo presenta tres ejercicios relacionados con la controversia del premio al riesgo. En el primer ejercicio se muestra que los modelos de *crash* propuestos en la literatura (Rietz (1988) y Salyer(1998)), en principio, no son inconsistentes con los datos. En el segundo ejercicio se resuelve el modelo C-CAPM para una representación estadística de la serie de consumo consistente con los notorios cambios en la primera autocorrelación y en la varianza de la tasa de crecimiento del consumo per cápita. En particular, se muestra que la Controversia del Premio al Riesgo es robusta respecto a tales consideraciones. El tercer ejercicio muestra que las estimaciones de la aversión relativa al riesgo (RRA) basadas en GMM presentadas en la literatura, pueden haber sido obtenidas con valores de RRA lo suficientemente altos como para resolver la controversia del premio al riesgo, debido a sesgos de muestra pequeña. En particular, la probabilidad de obtener estimaciones puntuales menores que dos del coeficiente aversión al riesgo es mayor que 0.05 para todos los valores de este parámetro no mayores que diez. En resumen, o bien la controversia del premio al riesgo es robusta a las conjeturas aquí consideradas, o la evidencia para las explicaciones alternativas es insuficiente.

Palabras claves: Premio al Riesgo, Modelos C-CAPM, Sesgo y Curtosis, GMM.

## ON THE EQUITY PREMIUM PUZZLE

### ABSTRACT

This paper presents three exercises about the equity premium puzzle. The first exercise shows that the crash models discussed in the literature (Rietz, 1988; Salyer, 1998) are not rejected by the data. In the second exercise, the C-CAPM is solved for a statistical representation of per capita consumption growth in the U.S.A. consistent with structural changes in variance and the first autocorrelation. The results about equity premium, however, remain unsatisfactory. The third exercise shows that GMM estimators for relative risk aversion in the literature could be obtained from larger true values (needed to explain the equity premium) because Monte Carlo experiments suggest that they are down-biased in this

<sup>1</sup> El autor agradece los comentarios de los participantes en los seminarios del Departamento de Economía de la Universidad de Concepción y la Universidad Alberto Hurtado, y del Comité de Evaluación de Tesis de la Universidad de Chile integrado por Rodrigo Fuentes y Salvador Zurita. Se agradece en forma especial a Rómulo Chumaceiro, quien estuvo a cargo de dirigir la tesis que dio origen a este trabajo. Narayana Kocherlakota me envió los datos de retornos de activos financieros y consumo. Dos árbitros anónimos contribuyeron significativamente a mejorar la exposición e interpretación de los resultados. Todos los datos y códigos de GAUSS usados en este trabajo están a disposición del público que los solicite a [coyarzun@tamu.edu](mailto:coyarzun@tamu.edu).

<sup>2</sup> Department of Economics, Texas A&M University. [coyarzun@tamu.edu](mailto:coyarzun@tamu.edu).

particular framework. In particular, the probability of obtaining point estimations of the risk aversion coefficient lower than two is greater than 0.05 for all the values of this coefficient that are not greater than ten.

Keywords: Equity Premium, C-CAPM, Skew, and Kurtosis Models, GMM..

## I. INTRODUCCIÓN

El Cuadro N° 1 muestra las medias de la tasa de interés real anual libre de riesgo de EE.UU. y el premio al riesgo medido como el retorno anual real de las acciones bursátiles menos la tasa libre de riesgo anual real para el período 1889-1978. En el Cuadro N° 1 también se muestran las predicciones del modelo C-CAPM descrito en Mehra y Prescott (1985) para las medias incondicionales de ambas variables. La diferencia entre las predicciones de este tipo de modelos y los datos han dado origen a lo que se conoce como la controversia del premio al riesgo (*equity premium puzzle*) y la controversia de la tasa libre de riesgo (*risk free puzzle*)<sup>3</sup>. Como ha sido enfatizado por Kocherlakota (1996), actualmente estas controversias son la evidencia más ampliamente difundida en contra de los modelos de agente representativo y representan importantes vacíos en el actual entendimiento de la macroeconomía: la controversia de la tasa libre de riesgo muestra que no sabemos porqué las personas han ahorrado tanto dado lo baja que ha sido la tasa de interés, en tanto que la controversia del premio al riesgo muestra que no sabemos en qué medida los individuos son aversos al riesgo que representa invertir en activos de renta incierta como las acciones.

**CUADRO N°1**  
**LAS CONTROVERSIAS ENTRE TEORÍA Y DATOS.**

	Libre de Riesgo	Premio al Riesgo
Datos	1.04 %	5.94 %
Predicción Modelo C-CAPM	4.30 %	0.29 %

Fuente: El modelo CCAPM corresponde a la versión de 2 estados de Mehra y Prescott (1985). El factor de descuento  $\beta$  ha sido 0.99 y la aversión relativa al riesgo  $\gamma$  es igual a 2. La base de datos es la misma usada por Grossman y Shiller (1981). La tasa libre de riesgo ha sido calculada anualizando y colocando en términos reales los retornos nominales a 90 y 60 días de distintos documentos Treasury Bills y Treasury Certificates. El Premio al Riesgo es la diferencia entre el retorno real anual del S&P 500 y la Libre de Riesgo. Para más detalles, ver Mehra y Prescott (1985), página 147 y Kocherlakota (1996) página 45.

<sup>3</sup> El Cuadro N°1 es sólo simbólico en el sentido que las contradicciones entre datos y teoría allí ilustradas son robustas a una serie de generalizaciones al Modelo de Mehra y Prescott (1985). Ver Kocherlakota (1996).

Los casi quince años que separan la publicación del trabajo de Mehra y Prescott (1985) y la realización de esta tesis han visto aparecer una serie de estudios respecto a estas controversias. Estos trabajos muestran en qué medida, flexibilizando el modelo de Mehra y Prescott (1985), es posible obtener predicciones que se acerquen más a los datos; sin embargo, como señala Kocherlakota (1996), estos esfuerzos han sido estériles en el sentido de que aún no tenemos una respuesta satisfactoria de por qué el premio al riesgo es tan alto<sup>4</sup>.

El trabajo que se presenta a continuación se titula “Sobre la Controversia del Premio al Riesgo” porque pretende ser una contribución en el entendimiento de distintos aspectos de estas controversias mediante la realización de dos ejercicios que se describen brevemente a continuación.

El primer y segundo ejercicios presentados en este artículo tienen que ver con la representación estadística del consumo que se utiliza para resolver el modelo. Una de las líneas de investigación que se puede distinguir en la literatura es aquella que trata de resolver la controversia mediante distintas representaciones estadísticas para la tasa de crecimiento del consumo. Desafortunadamente, los procesos generadores de datos propuestos en estos trabajos no han sido obtenidos a partir de buenas representaciones estadísticas de la serie de consumo. El primer ejercicio es una discusión acerca de la plausibilidad de los trabajos que intentan explicar el premio al riesgo en base a eventuales estados de *crash*. Esta discusión se basa en las implicancias de estos modelos para el tercer y cuarto momento de la tasa de crecimiento del consumo y trata de evaluar en qué medida la evidencia disponible apoya dichas hipótesis.

En el segundo ejercicio se busca una representación estadística de la serie de consumo que sea capaz de dar cuenta de los quiebres en varianza y en la primera autocorrelación presentes en la serie, sin descuidar esta vez, lo que ocurre con el tercer y cuarto momento.

El tercer ejercicio tiene que ver con el valor del coeficiente de aversión relativa al riesgo (RRA) cuando se usan preferencias con aversión relativa al riesgo constante (CRRA). Mehra y Prescott (1985) citan 7 estudios donde se estima, se usa, o bien, se argumenta que la RRA está entre 0 y 2, sin embargo, Kocherlakota (1990) ha mostrado que la única de esas estimaciones que se relaciona con mercados financieros podría estar subestimando el verdadero valor de la RRA. Desde la publicación de los trabajos de Hansen (1982) y Hansen y Singleton (1982), el Método Generalizado de Momentos (GMM) se ha convertido en una de las técnicas más populares para estimar parámetros de preferencias. Hansen y Singleton (1984) y Kocherlakota (1990), usando GMM con datos financieros, han obtenido estimaciones de RRA menores que 3. En el ejercicio que aquí se presenta se muestra que tales estimaciones pueden haber sido obtenidas con valores de RRA lo suficientemente altos como para resolver la controversia del premio al riesgo, dadas las severas subestimaciones en que puede incurrir GMM en este tipo de estudios.

La sección II presenta el tipo de economías con las que se trabajará en las secciones siguientes. La sección III muestra los ejercicios uno y dos. La sección IV presenta el tercer ejercicio. La sección V contiene las principales conclusiones.

---

<sup>4</sup> Ver Kocherlakota (1996) para una revisión de estos trabajos.

## II. LAS ECONOMÍAS.

### II.1. El modelo C-CAPM.

El tipo de economías de las que se tratará en este trabajo son economías de dotación habitadas por un agente representativo que en cada período  $t$  maximiza

$$E_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} U(c_s) \quad (1)$$

sujeto a la siguiente restricción presupuestaria

$$c_t \leq B_t + \sum_{i=1}^s (p_{it} + d_{it})x_{it} - \sum_{i=1}^s p_{it}x_{it+1} - q_t B_{t+1} + y_t \quad (2)$$

donde  $c_t$  es el consumo del agente en el período  $t$ ,  $y_t$  es un ingreso exógeno recibido por el agente,  $B_t$  son los activos libres de riesgo en los que el agente invirtió en  $t - 1$  cuyo precio fue  $q_{t-1}$  y cuya oferta neta es cero,  $x_{it}$  corresponde a los activos riesgosos con oferta neta uno, cuyo precio de mercado en cada período  $t$  es  $p_{it}$  y que dan derecho a un dividendo  $d_{it+n}$  para  $n = 1, 2, \dots, \infty$ .

Se asume que el agente tiene preferencias tipo CRRA,  $U(c_t) = c_t^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ ; donde  $\gamma$  es el coeficiente de aversión al riesgo que nos proporciona una medida de la concavidad de la función de utilidad.

Los precios de equilibrio de los activos riesgosos y del activo libre de riesgo satisfacen:

$$\begin{aligned} p_{it} &= E_t \left\{ \beta (c_{t+1}/c_t)^{-\gamma} [d_{it+1} + p_{it+1}] \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, s. \\ q_t &= E_t \left\{ \beta (c_{t+1}/c_t)^{-\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$E_t$  corresponde a la esperanza de los agentes en el período  $t$ .

Para que el análisis se centre alrededor de variables estacionarias, en la primera de las ecuaciones (3) se divide a ambos lados por  $d_{it}$  de modo de obtener ecuaciones funcionales en la razón precio-dividendo  $w_{it}$ :

$$w_{it} = E_t \left\{ \beta (c_{t+1}/c_t)^{-\gamma} (d_{it+1} + d_{it}) [1 + w_{it+1}] \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, s. \quad (4)$$

Los retornos brutos de los activos riesgosos serán:

$$R_{it+1}^e = (d_{it+1} + d_{it})(1 + w_{it+1})/w_{it} \quad \forall i = 1, 2, \dots, s.$$

y el retorno bruto del activo libre de riesgo será:

$$R_{t+1}^b \equiv \frac{1}{q_t}$$

Las economías con las que se trabajará en las secciones siguientes corresponden a casos particulares de la que se ha presentado en esta sección. A continuación se discute cómo se genera el premio al riesgo en esta economía.

## II.2. El Premio al Riesgo en el Modelo C-CAPM.

A partir de las ecuaciones (3) y las expresiones para los retornos del activo libre de riesgo y el activo riesgoso que siguen después de la ecuación (4) se puede establecer que estos retornos satisfacen:

$$1 = E_t\{\beta(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma} R_{it+1}^e\}$$

$$1 = E_t\{\beta(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma} R_{t+1}^b\}$$

Estas dos relaciones implican la siguiente ecuación, a la que llamaremos la *Ecuación Fundamental del Premio al Riesgo*:

$$E_t\{R_{it+1}^e - R_{t+1}^b\} = -(E_t\{(c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}\})^{-1} Cov_t((c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}, R_{it+1}^e)$$

Esta ecuación es importante para la interpretación de los resultados que se presentarán más adelante. Aquí podemos ver que si el retorno al activo riesgoso está positivamente correlacionado con la tasa de crecimiento del consumo y si el coeficiente de aversión al riesgo  $\gamma$  es positivo, entonces el valor esperado del premio al riesgo es positivo.

También se puede establecer que en la medida que  $\gamma$  sea mayor, el valor esperado del premio al riesgo será mayor.

Otro aspecto que implica esta relación es que la varianza de la tasa de crecimiento del consumo y del retorno del activo riesgoso, si bien están estrechamente relacionados con el premio al riesgo, ellos no proveen una caracterización precisa del mismo. Consideremos, por ejemplo, el caso en que  $\gamma = 1$ ; en este caso  $E_t\{R_{it+1}^e - R_{t+1}^b\} = -(E_t\{(c_{t+1}/c_t)^{-1}\})^{-1} Cov_t((c_{t+1}/c_t)^{-1}, R_{it+1}^e)$ . Dado que la variable clave en este caso para determinar el premio al riesgo es  $Cov_t((c_{t+1}/c_t)^{-1}, R_{it+1}^e)$ , conocer la varianza de la tasa de crecimiento del consumo y del retorno del activo riesgoso no es suficientemente informativo en la determinación del premio al riesgo y, en principio, los momentos superiores de la distribución del consumo

como sesgo y curtosis también pueden ser importantes en la determinación del premio al riesgo.

Los aspectos anteriores son fundamentales para entender la importancia de los ejercicios numéricos presentados más abajo.

La interpretación económica de la *Ecuación Fundamental del Premio al Riesgo* es la siguiente: cuando la función de utilidad de los individuos es estrictamente cóncava, la utilidad marginal del consumo es estrictamente decreciente. Consideremos dos activos, uno que entrega un retorno seguro y el otro que entrega un retorno que está positivamente correlacionado con la tasa de crecimiento del consumo, es decir el retorno de este segundo activo es mayor cuando el consumo es mayor y es menor cuando el consumo es menor. Dado que la utilidad marginal del consumo es decreciente, lo anterior implica que el activo riesgoso entrega un retorno mayor cuando la utilidad marginal del consumo es menor y entrega un menor retorno cuando la utilidad marginal del consumo es mayor. En compensación de lo anterior, este activo riesgoso debe ofrecer, en promedio, un mayor retorno que el activo libre de riesgo. Una consecuencia de lo anterior es que si la función de utilidad es más cóncava (con  $\gamma$  mayor) el premio al riesgo será mayor.

### III. REPRESENTACIÓN ESTADÍSTICA DEL CONSUMO Y LA CONTROVERSIA DEL PREMIO AL RIESGO.

#### III.1. La Economía.

Las economías de esta sección corresponden al tipo de economías propuestas por Mehra y Prescott (1985). Estas economías corresponden al caso particular de la economía de la sección II en que  $y_t = 0$  para cualquier período  $t$  y sólo se transa un activo riesgoso, de manera que en equilibrio  $c_t = d_t$ . Además se supone que los agentes tienen expectativas racionales. Para resolver la ecuación funcional (4) Mehra y Prescott (1985) discretizan el proceso seguido por la tasa de crecimiento del consumo. En particular, se asume que  $\lambda_t \equiv c_t/c_{t-1}$  pertenece al conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Para poder replicar la primera autocorrelación de la tasa de crecimiento, se asume que ésta sigue un proceso de transición markoviano de primer orden cuya matriz de transición tiene componentes  $(i, j)$  dados por

$$\phi_{ij} = Pr \{ \lambda_{t+1} = \lambda_j \mid \lambda_t = \lambda_i \} \quad (5)$$

Luego de discretizar el proceso estocástico seguido por la tasa de crecimiento, la ecuación funcional (4) se transforma en un sistema de ecuaciones en  $w_i$  con tantas incógnitas como estados dado por:

$$w_i = \beta \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \lambda_j^{1-\gamma} (1 + w_j) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Por último, el precio de equilibrio del activo libre de riesgo es:

$$q_i = \beta \sum_{j=1}^n \phi_{ij} \lambda_j^{-\gamma}$$

### III.2. Premio al Riesgo y Momentos Superiores.

Como se muestra más abajo, la discretización que se hace del proceso estadístico seguido por la tasa de crecimiento del consumo es clave para las predicciones que se obtienen del modelo. Mehra y Prescott (1985) calibran un modelo de sólo dos estados

$$\lambda_1 = 1 + \mu + \delta \quad \lambda_2 = 1 + \mu - \delta, \quad (6)$$

donde la matriz de transición está determinada sólo por un parámetro  $\phi$ , de manera tal que

$$\phi_{11} = \phi_{22} = \phi \quad \phi_{21} = \phi_{12} = 1 - \phi \quad (7)$$

Los valores de los tres parámetros que describen este modelo estadístico ( $\phi$ ,  $\delta$  y  $\mu$ ) son escogidos de manera tal que la media, desviación estándar y primera autocorrelación muestrales coincidan con sus contrapartes incondicionales.

Como un análisis de sensibilidad, Mehra y Prescott (1985), también calibran un modelo de cuatro estados :

$$\lambda_1 = 1 + \mu \quad \lambda_2 = 1 + \mu + \delta \quad \lambda_3 = 1 + \mu \quad \lambda_4 = 1 + \mu - \delta, \quad (8)$$

con matriz de transición

$$\begin{bmatrix} \phi/2 & \phi/2 & (1-\phi)/2 & (1-\phi)/2 \\ \phi/2 & \phi/2 & (1-\phi)/2 & (1-\phi)/2 \\ (1-\phi)/2 & (1-\phi)/2 & \phi/2 & \phi/2 \\ (1-\phi)/2 & (1-\phi)/2 & \phi/2 & \phi/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

usando los mismos momentos con los que se calibró el modelo de dos estados, se obtiene el valor de los tres parámetros que caracterizan el proceso.

Al pasar del modelo de 2 estados al modelo de 4 estados los autores encuentran que el premio al riesgo aumenta de 0.35% a 0.39% que aún es muy bajo al lado del premio al riesgo observado de 5.9 %.

Rietz (1988) ha señalado que las especificaciones de dos y cuatro estados de Mehra y Prescott (1985) no admiten la posibilidad de grandes caídas en la tasa de crecimiento del consumo; en ambas especificaciones (2 y 4 estados) las tasas de crecimiento se distribuyen simétricamente alrededor de la media con tasas de crecimiento relativamente altas o relativamente bajas, pero sin posibilidades de grandes caídas; por tal motivo, Rietz propone un proceso de tres estados con dos estados de relativamente alto y relativamente bajo crecimiento

respectivamente, y un tercer estado altamente improbable de *crash* donde la tasa de crecimiento es inusualmente baja. La especificación de Rietz (1988) es capaz de replicar la tasa libre de riesgo y el premio al riesgo. Salyer (1998), con una especificación muy similar a la de Rietz (1988), también replica los primeros momentos del premio al riesgo y la tasa libre de riesgo. Este tipo de especificaciones han sido criticadas duramente por Mehra y Prescott (1988), quienes han señalado que estos escenarios de *crash* son demasiado extremos como para aceptar que constituyen una verdadera respuesta a la controversia.

Una métrica natural para dirimir sobre la plausibilidad de los modelos de *crash* se encuentra en el tercer y cuarto momentos de la tasa de crecimiento del consumo. El Cuadro N° 2 muestra los primeros cuatro momentos incondicionales de los modelos arriba mencionados y su contraparte muestral; este cuadro muestra que si bien Rietz (1988) estaba en lo cierto respecto a que los modelos de Mehra y Prescott (1985) eran demasiado conservadores al subestimar los valores absolutos de el sesgo y la *curtosis*, los modelos de *crash* sitúan estos valores aún mucho más lejos de los observados.

**CUADRO N°2**  
**MOMENTOS INCONDICIONALES PARA LA TASA DE CRECIMIENTO DEL**  
**CONSUMO PERCÁPITA IMPLICADOS POR LOS MODELOS.**

<b>Modelo</b>	<b>Media</b>	<b>Desv. Estándar</b>	<b>Sesgo</b>	<b>Curtosis</b>
<b>Mehra y Prescott 2</b>	1.018	0.036	0.000	1.000
<b>Mehra y Prescott 4</b>	1.018	0.036	0.000	2.000
<b>Rietz (1988)</b>	1.018	0.036	-2.332	34.568
<b>Salyer (1998)</b>	1.018	0.036	-9.233	104.629
<b>Datos</b>	1.018	0.036	-0.343	3.688

Fuente: Elaboración propia. Mehra y Prescott 2 y Mehra y Prescott 4 corresponden a los modelos de 2 y 4 estados respectivamente. La tasa de crecimiento bruta del consumo per cápita es anual y real.

Sin embargo, los momentos incondicionales mostrados en el Cuadro N° 2 no necesariamente coinciden con los que observaríamos en realizaciones de muestra pequeña para cada uno de estos procesos; por tal motivo un experimento de Monte Carlo es útil para ver cómo se desempeñan estos modelos en períodos tan cortos como para los que Mehra y Prescott (1985) tenían datos. El experimento que se ha realizado consiste en simular 1000 realizaciones, con 90 observaciones cada una (el tamaño de muestra analizado por Mehra y Prescott (1985)), para los modelos estadísticos propuestos por Mehra y Prescott (1985), Rietz (1988) y Salyer (1998). Para cada una de las 1000 realizaciones se estimó el sesgo y *curtosis*. Finalmente estos estadísticos fueron ordenados para obtener los intervalos de confianza cubriendo un



95% de las realizaciones. El Cuadro N° 3 muestra los intervalos de confianza para el tercer y cuarto momento implicados por cada uno de los modelos. Este cuadro muestra que el sesgo y la *curtosis* observados en los datos no rechazan los modelos de *crash* de Rietz (1988) y Salyer (1998), pero sí rechazan las dos especificaciones de Mehra y Prescott (1985).

**CUADRO N°3**  
**INTERVALOS DE CONFIANZA EN MUESTRA PEQUEÑA PARA SESGO**  
**Y CURTOSIS DE LA TASA DE CRECIMIENTO DEL CONSUMO PERCÁPITA.**

Modelo	Sesgo		Curtosis	
	LI	LS	LI	LS
<b>Mehra y Prescott 2</b>	-0.355	0.355	0.978	1.141
<b>Mehra y Prescott 4</b>	-0.179	0.182	1.632	2.515
<b>Rietz (1988)</b>	-5.720	0.593	0.978	46.528
<b>Salyer (1998)</b>	-7.743	0.310	0.978	68.926

Fuente: Elaboración propia. LI: límite inferior con un 95% de confianza. LS: límite superior con un 95% de confianza. Se han simulado 1000 realizaciones de 90 períodos. Mehra y Prescott2 y Mehra y Prescott4 corresponden a los modelos de 2 y 4 estados respectivamente. La tasa de crecimiento bruta del consumo per cápita es anual y real.

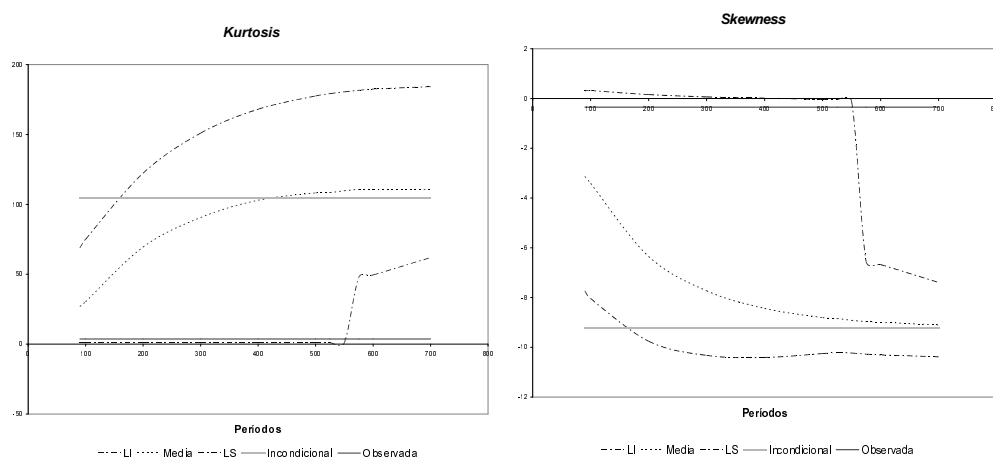
Los Cuadros N° 2 y 3 en conjunto nos muestran que si bien los modelos de *crash* de Rietz (1988) y Salyer (1998) son *ad-hoc* en el sentido que sitúan el sesgo del proceso muy por debajo de lo que se observa en los datos y la *curtosis* del proceso muy por encima de lo que se observa en los datos; aún no disponemos de suficiente evidencia para rechazar estas especificaciones. La razón por lo que ocurre lo anterior es porque en períodos de 90 años los estimadores del sesgo y la *curtosis* en los modelos de *crash* suelen subestimar (en valor absoluto) ambos momentos. Esto es particularmente evidente para el modelo de Salyer (1998) en el cual el sesgo incondicional es de -9.23; sin embargo como se muestra en el Cuadro N° 3, en el 97.5% de las simulaciones se estima un sesgo mayor a -7.74. Análogamente, la *curtosis* incondicional de este modelo es de 104.63, sin embargo, en el 97.5% de las simulaciones se estima una *curtosis* menor a 68.93.

Para períodos de tiempo más largos el inconveniente señalado en el párrafo anterior no se presentaría. Esto se ilustra en el Gráfico N°1 donde se muestran los intervalos de confianza para el sesgo y la *curtosis* obtenidos a partir de mil realizaciones del modelo de Salyer (1998) para muestras desde 90 hasta 700 períodos. Este gráfico, al igual que el cuadro N° 3 nos muestra que aún no disponemos de suficiente evidencia para rechazar los modelos de *crash* por sus implicancias para el tercer y cuarto momento, pero además nos muestra

una situación muy incómoda: necesitaríamos más de 500 períodos de evidencia para poder rechazar estos modelos por sus implicancias para estos momentos.

La razón por la cual en muestras pequeñas los modelos de *crash* no se ven inconsistentes con los datos en relación a su tercer y cuarto momento es porque con pocas observaciones la probabilidad de que el estado de *crash* aparezca es baja por lo que el econometrista a menudo observará la realización de un proceso como el descrito por un modelo sin *crash*. En otras palabras, si creemos que la eventualidad de un *crash* es la explicación a la controversia del premio al riesgo, lo que creemos es que existe una posibilidad latente de que un gran *crash* se realice en el futuro, lo que es sabido por los agentes económicos, pese a que aún esto no se manifieste en los datos.

**GRÁFICO N° 1**  
**SESGO Y CURTOSIS EN MUESTRA PEQUEÑA PARA EL MODELO DE**  
**SALYER (1998) PARA LA TASA DE CRECIMIENTO DEL CONSUMO.**



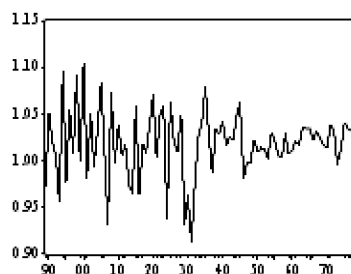
Intervalos de Confianza obtenidos a partir de 1000 realizaciones de 90 períodos del modelo.

### III.3. Representación Estadística del Consumo.

En esta sección se describen modelos estadísticos alternativos para la tasa de crecimiento del consumo que serán discretizados para dar solución numérica al modelo C-CAPM descrito en la sección II. La base de datos es la misma usada por Mehra y Prescott (1985) y corresponde a la tasa de crecimiento anual real del consumo per cápita de Estados Unidos entre los años 1890 y 1979 que se puede observar en el Gráfico N°2.

## GRÁFICO N° 2

### TASA DE CRECIMIENTO BRUTA REAL ANUAL DEL CONSUMO PERCÁPITA EN ESTADOS UNIDOS (1889-1978).



Fuente: La misma utilizada por Grossman y Shiller (1981) correspondiente a la serie de consumo Real percápita Kuznets-Kendrick-USNIA y luego deflactada.

## CUADRO N° 4

### DESCRIPCION ESTADISTICA DE LAS SERIES.

Años	Media	Desv. Est.	Corr(-1)	Sesgo	pv-Sesgo	pv-Sesgo	pv-Curtosis	J-Bera-pv
<b>Tasa de Crecimiento Bruta Real Anual del Consumo Percápita</b>								
1889-1978	1.018	0.036	-0.151	-0.343	0.18	3.688	0.18	0.17
1889-1949	1.017	0.043	-0.167	-0.220	0.48	2.640	0.57	0.66
1950-1978	1.021	0.012	0.226	-0.140	0.76	1.830	0.20	0.42
<b>Retorno Libre de Riesgo</b>								
1889-1978	1.043	5.556	0.488	0.254	0.33	5.383	0.00	0.00
1889-1949	1.592	6.590	0.480	0.009	0.98	3.943	0.13	0.32
1950-1978	-0.111	1.741	0.413	-1.352	0.00	4.753	0.05	0.00
<b>Premio al Riesgo</b>								
1889-1978	5.936	16.837	0.185	-0.166	0.52	3.765	0.14	0.27
1889-1949	5.357	18.302	0.155	-0.182	0.56	3.522	0.41	0.60
1950-1978	7.154	13.454	0.208	0.185	0.68	2.961	0.97	0.92

Fuente: Retorno Libre de Riesgo y Premio al Riesgo están expresados en porcentajes. La base de datos es la misma usada por Grossman y Shiller (1981). Libre de riesgo ha sido calculado anualizando y colocando en términos reales los retornos nominales a 90 y 60 días de distintos documentos: Treasury Bills y Treasury Certificates. El Premio al Riesgo es la diferencia entre el retorno real anual del S&P 500 y la Libre de Riesgo. Para más detalles, ver Mehra y Prescott (1985), página 147 y Kocherlakota (1996) página 45. La tasa de crecimiento bruta del consumo percápita es anual y real.

El Cuadro N°4 describe estadísticamente la serie de Crecimiento del Consumo y además las series de Premio al Riesgo y Retorno Libre de Riesgo.

Cabe notar en el Cuadro N° 4 que la desviación estándar de la tasa de crecimiento del consumo registra una caída importante a partir de la segunda mitad de este siglo. También se observa que la primera autocorrelación cambia de signo para el mismo período. Estas dos características están ausentes en las descripciones estadísticas discutidas en la sección III.2.

Los procesos estadísticos discretos usados por Mehra y Prescott (1985), Rietz (1988) y Salyer (1998) corresponden a procesos de transición markovianos de primer orden, es decir, la función de distribución de la tasa de crecimiento en el período  $t$  está completamente determinada por la realización de la tasa de crecimiento en el período  $t - 1$ , llevando esta caracterización a un modelo de series de tiempo continuo podemos pensar en esta serie siguiendo un modelo AR(1). Como se señaló en la sección anterior, la práctica habitual para encontrar los componentes de la matriz de transición markoviana consiste en calzar algunos momentos de la tasa de crecimiento de consumo; en este ejercicio, en cambio, el enfoque seguido consiste en discretizar un modelo de series de tiempo que puede estar detrás de la realización de la serie. La principal ventaja de este enfoque es que permite dar cuenta de una serie de características de la serie que en los trabajos señalados no han sido consideradas. Por los motivos arriba señalados, una primera aproximación será la discretización de un AR(1).

### III.3.1. Solución del Modelo para un AR(1).

Esta especificación corresponde a un AR(1) con constante y sin tendencia ni variables *dummies* de ningún tipo. El Cuadro N° 5 presenta el resultado de las estimaciones y distintos tests de especificación.

Como se señaló en la sección III.1, la discretización del proceso estocástico continuo seguido por la tasa de crecimiento del consumo facilita la solución del modelo de valoración de activos. Tauchen (1986a) y Tauchen y Hussey (1991) describen procedimientos alternativos de discretización de modelos autoregresivos. En el primero de estos trabajos se presenta un procedimiento conocido como Discretización Equidistante en el cual los puntos del eje de las abcisas son escogidos de manera tal que todos se encuentran a igual distancia y la probabilidad asociada a cada punto corresponde al área bajo la curva de densidad sobre el tramo del soporte que se encuentra más cercano a cada uno de los puntos. El procedimiento descrito en Tauchen y Hussey (1991) se caracteriza porque los  $N$  puntos en el eje de las abcisas se escogen eficientemente siguiendo reglas de Cuadratura Numérica que permiten replicar exactamente  $N-1$  momentos de la distribución continua. El Anexo A presenta una breve descripción de como se realiza esta discretización. En el Cuadro N°6 se presentan los momentos implicados por la discretización de Cuadratura Numérica para la Tasa de Crecimiento del Consumo, la Tasa Libre de Riesgo y el Premio al Riesgo; para obtener los momentos relativos a las dos últimas variables es necesario además imponer el modelo teórico de la sección III.1.

**CUADRO N° 5**  
**MODELO ESTADÍSTICO AR(1) PARA LA TASA DE CRECIMIENTO DEL**  
**CONSUMO PERCÁPITA.**

$y_t(1-\rho L) = c + \varepsilon_t$	Coefficiente	Desviación Estándar	<i>p-value</i>
<i>c</i>	0.020486	0.004143	0.0000
$\rho$	-0.138619	0.105134	0.1908
$R^2$	0.008322	Q (pv)	0.278
Log-Likelihood	173.0345	ARCH (pv)	0.018
Test F (p-value)	0.190796	Jarque-Bera (pv)	0.000
Desviación Estándar	0.035022	Durbin- Watson	1.923

Fuente: Elaboración propia.  $y_t = \ln(c/c_{t-1})$ .  $L$  es el operador de rezagos.  $R^2$  corresponde a  $R^2$  corregido,  $Q$  corresponde al menor de los *p-values* hasta 10 rezagos, la hipótesis alternativa del ARCH es un ARCH (1). La tasa de crecimiento bruta del consumo per cápita es anual y real.

**CUADRO N° 6**  
**MOMENTOS IMPLICADOS POR EL MODELO AR(1) PARA LA TASA LIBRE DE**  
**RIESGO Y EL PREMIO AL RIESGO.**

	Media	Desv. Est.	Sesgo	Curtosis	Corr(-1)
Tasa Crec. Consumo	1.0188	0.0356	0.1050	3.0196	-0.1385
<b>Libre de Riesgo</b>					
$\gamma = 2$	4.47	1.0126	0.0291	3.0015	-0.1386
$\gamma = 4$	7.53	2.0849	0.0582	3.0060	-0.1386
$\gamma = 8$	12.34	4.3575	0.1164	3.0241	-0.1385
<b>Premio al Riesgo</b>					
$\gamma = 2$	0.28	0.0406	0.1164	3.0252	-0.1386
$\gamma = 4$	0.70	0.0505	0.1410	3.0399	-0.1386
$\gamma = 8$	1.92	0.0702	0.1916	3.0832	-0.1385

Fuente: Elaboración propia.  $\beta = 0.99$ . La discretización se ha hecho con 5 estados. La Libre de Riesgo y el Premio al Riesgo son reales anuales y están expresados en porcentaje.

En línea con los resultados reportados por Mehra y Prescott (1985) la Tasa Libre de Riesgo replicada es mucho más alta que la observada y el Premio al Riesgo replicado es mucho más bajo que el observado.

### **III.3.2. Quiebre en los Coeficientes y en la Varianza.**

Cuando se observa el test de coeficientes recursivos para la representación AR(1) podemos apreciar que los coeficientes no son estables, por tal motivo, a continuación se presenta la solución del modelo para una representación estadística que permite quiebres en los coeficientes. Bai y Perron (1998a y 1998b) describen un algoritmo que permite encontrar el número de quiebres y la fecha en que éstos se han producido. Usando el test secuencial de quiebres se encontró la presencia de sólo un quiebre que se habría producido el año 1930. El Cuadro N° 7 muestra el resultado de las estimaciones con quiebre y algunos tests de especificación.

Cabe notar que este modelo es capaz de dar cuenta del cambio de signo en la primera autocorrelación y la disminución de la varianza de la tasa de crecimiento del consumo; sin embargo, como muestra el Cuadro N° 8, nuevamente la tasa libre de riesgo y el premio al riesgo se encuentran lejos de lo que dicen los datos.

En esta sección se ha generalizado el modelo de Mehra y Prescott (1985) para permitir quiebres en la descripción estadística de la serie de consumo, siendo los resultados muy similares a los obtenidos por estos autores. En el ejercicio que se presenta en la próxima sección se trabaja en una dirección distinta: se discute la posibilidad de que las restricciones impuestas sobre el coeficiente de aversión al riesgo sean demasiado restrictivas. El valor de  $\gamma$  podría ser mucho mayor que lo que creen la mayoría de los economistas.

**CUADRO N° 7**

**MODELO ESTADÍSTICO AR(1) CON QUIEBRE EN COEFICIENTES Y VARIANZA  
PARA LA TASA DE CRECIMIENTO DEL CONSUMO PERCAPITA.**

$y_t(1-\rho L) = c + \varepsilon_t$	<b>Coefficiente</b>	<b>Desv. St.</b>	<b><i>p-value</i></b>
$c_1$	0.028158	0.006919	0.0002
$\rho_1$	-0.487650	0.148982	0.0023
$c_2$	0.010076	0.003614	0.0076
$\rho_2$	0.480041	0.111014	0.0001
$R^2$	0.212	F test (p.v.)	0.000
Desv. Est. 1	0.040	Desv. Est. 2	0.022
Test Q-pv 1	0.768	Test Q-pv 2	0.143
ARCH-pv1	0.268	ARCH-pv 2	0.854
Jarque-Bera-pv1	0.398	Jarque-Bera-pv 2	0.000

Fuente: Elaboración propia.  $y_t = \ln(c_t/c_{t-1})$ .  $R^2$  corresponde a  $R^2$  corregido. Q corresponde al menor de los *p-values* hasta 10 rezagos. La hipótesis alternativa del test ARCH es un ARCH(1). Los números y subíndices 1 y 2 indican que los tests son realizados para los residuos desde 1889 hasta 1929 y desde 1930 hasta 1978 respectivamente.

**CUADRO N° 8**  
**MOMENTOS IMPLICADOS POR EL MODELO AR(1) SIN Y CON QUIEBRES**  
**PARA LA TASA LIBRE DE RIESGO Y EL PREMIO AL RIESGO.**

	Media	Desv. Est.	Sesgo	Curtosis	Corr(-1)
<b>Tasa Crec. Consumo</b>					
AR (1) Sin Quiebre	1.0188	0.0356	0.1050	3.0196	-0.1385
1889-1929	1.0201	0.0452	0.1330	3.0314	-0.4871
1930-1978	1.0181	0.0259	-1.3354	7.0280	0.4592
<b>Libre de Riesgo</b>					
AR (1) Sin Quiebre	4.47	1.0126	0.0291	3.0015	-0.1386
1889-1929	4.69	4.5246	0.1290	3.0262	-0.4872
1930-1978	4.58	3.0321	-0.0071	1.0171	0.7089
<b>Premio al Riesgo</b>					
AR (1) Sin Quiebre	0.28	0.0406	0.1164	3.0252	-0.1386
1889-1929	0.41	0.0538	0.1549	3.0703	-0.4840
1930-1978	0.00	0.0241	-1.8228	12.3194	-0.0000

Fuente: Elaboración propia.  $\gamma = 2, \beta = 0.99$ . La discretización para 1889-1929 es de 5 estados usando el método propuesto por Tauchen y Hussey (1991). Como muestra el Cuadro N° 7, los residuos de 1930-1978 rechazan normalidad, por lo que he optado por calibrar un proceso con tres estados de manera de replicar los primeros cuatro momentos de la serie y la primera autocorrelación. Esta matriz de transición ha sido restringida a tener una forma similar a la de Rietz (1988). La Libre de Riesgo y el Premio al Riesgo son reales anuales y están expresados en porcentaje.

#### IV. ¿ ES TAN BAJA LA AVERSIÓN AL RIESGO ?

A partir de la publicación del trabajo de Hansen (1982), GMM se ha convertido en una de las técnicas más populares para estimar parámetros de preferencias. Usando datos financieros, Kocherlakota (1990) y Hansen y Singleton (1984) han obtenido estimaciones de  $\gamma$  menores que 3, sin embargo, una serie de experimentos de Monte Carlo llevados a cabo por Tauchen (1986b) y Chumacero (1997), entre otros, han mostrado que, bajo determinadas circunstancias, GMM subestima el valor de  $\gamma$ . En el ejercicio que se presenta a continuación se muestra que estimaciones como las realizadas por Kocherlakota (1990), precisamente, corresponden al tipo de situaciones en las que GMM subestima  $\gamma$ ; y aún más importante, con niveles de aversión al riesgo lo suficientemente altos como para resolver la controversia, estimaciones del orden de 2 ó 3 no son tan improbables.



#### IV.1. La Economía.

En esta economía consideraremos dos activos; el activo libre de riesgo y un activo riesgoso que paga  $d_t$ . Como ahora no suponemos  $y_t = 0$ , en equilibrio  $d_t$  y  $c_t$  pueden ser distintos. El retorno al único activo riesgoso de esta economía será denotado por  $R_{t+1}^e$ , mientras que el retorno del activo libre de riesgo será denotado por  $R_{t+1}^b$ . Esta notación es consistente con la notación utilizada en la sección II.

Para poder resolver el modelo y, en particular, la ecuación funcional (4), al igual que en Mehra y Prescott (1985), la economía es discretizada de manera tal que  $\lambda_t \equiv c_t/c_{t-1}$  pertenece al conjunto  $\Omega_\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  y  $\zeta_t \equiv d_t/d_{t-1}$  pertenece al conjunto  $\Omega_\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ . Se asume que la evolución del par  $(\lambda_t, \zeta_t)$  sigue un proceso de transición markoviana de primer orden donde cada estado  $i$  está determinado por la realización de ambas tasas de crecimiento, luego existen  $n^2$  estados  $i$  distintos pertenecientes al conjunto  $\Omega_\lambda \times \Omega_\zeta$ , en los que las tasas de crecimiento toman los valores  $(\lambda_i, \zeta_i)$ . La matriz de transición tiene componentes  $\phi_{ij}$  que indican la probabilidad de ir del estado  $i$  al estado  $j$ .

El precio de equilibrio del activo libre de riesgo en el estado  $i$  es:

$$q_i = \beta \sum_{j=1}^{n^2} \phi_{ij} \lambda_j^{-\gamma}$$

En tanto que las relaciones precio dividido del activo riesgoso se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$w_i = \beta \sum_{j=1}^{n^2} \phi_{ij} \lambda_j^{-\gamma} \zeta_j (1 + w_j) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n^2$$

#### IV.2. Descripción de los Experimentos.

El ejercicio que se realizó consistió en la simulación de 1000 muestras de la economía descrita, para 90 períodos con preferencias descritas por  $\beta = 0.99$  y  $\gamma \in \{1, 2, \dots, 14\}$ . Este valor para  $\beta$  es estándar en la literatura y el rango estudiado para  $\gamma$  es una extensión al rango típico asumido en la literatura con el fin de permitir una mayor aversión al riesgo (ver Kocherlakota, 1996, para una discusión más detallada).

Los conjuntos  $\Omega_\lambda$  y  $\Omega_\zeta$ , y la matriz de transición fueron obtenidos usando Cuadratura Numérica Multivariada siguiendo a Tauchen y Hussey (1991)<sup>5</sup>. El proceso que se ha dis-

<sup>5</sup> Para una descripción detallada de la cuadratura de procesos multivariados ver Tauchen y Hussey (1991). Al igual que en Kocherlakota (1991), la discretización se ha hecho con  $n = 4$ .

cretizado corresponde a la representación estadística de Kocherlakota (1990) para la tasa de crecimiento del consumo y del dividendo:

$$\begin{aligned} \ln \zeta_t &= 0.004 + 0.117 \ln \zeta_{t-1} + 0.414 \ln \lambda_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ \ln \lambda_t &= 0.021 + 0.017 \ln \zeta_{t-1} + 0.161 \ln \lambda_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

$$Var(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0.0140 & 0.00177 \\ 0.00177 & 0.0012 \end{bmatrix}$$

Estas estimaciones fueron realizadas con los mismos datos que usaron Mehra y Prescott (1985), por lo tanto, la unidad de tiempo en este experimento es interpretada como un año.

Para cada una de las 1000 realizaciones se ha procedido a estimar  $\gamma$  y  $\beta$  por GMM en 2 etapas usando las condiciones de primer orden e instrumentos descritos en el Cuadro N° 9.

**CUADRO N° 9**  
**CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD E INSTRUMENTOS DE LOS ESTIMADORES DE GMM.**

<b>Estimador</b>	<b>C.P.O.</b>	<b>Instrumentos</b>
$A_1$	$R^e_{t+1}$	$R^e_t, \lambda_t, 1$
$A_2$	$R^b_{t+1}$	$R^b_t, \lambda_t, 1$
$A_3$	$R^e_{t+1}, R^b_{t+1}$	$R^e_t, R^b_t, \lambda_t, 1$

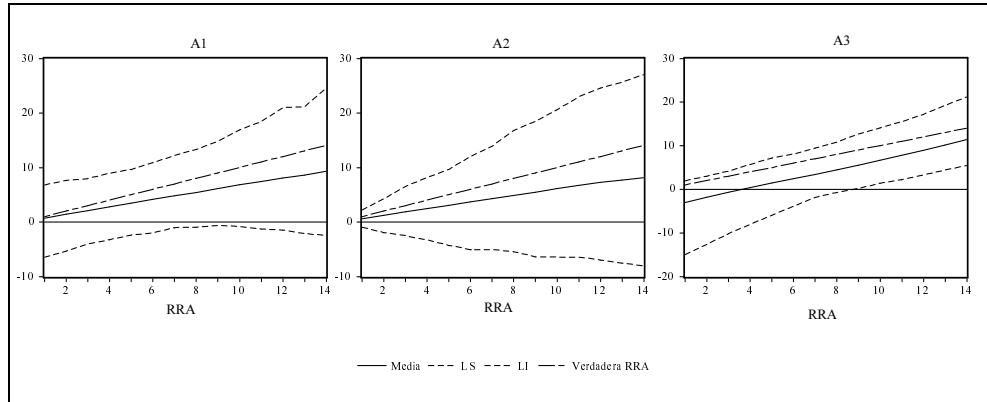
Fuente: Elaboración propia. C.P.O. quiere decir las condiciones de primer orden asociadas a los activos señalados en esa columna junto con el instrumento señalado en la columna Instrumentos han sido utilizados para construir la condición de Ortogonalidad. Para mayor discusión ver Hansen y Singleton (1982) y Kocherlakota (1990).

El Gráfico N° 3 muestra el intervalo de confianza con un 95% para estos tres estimadores de  $\gamma$ . Como se puede apreciar en este gráfico, para valores de  $\gamma$  tan altos como 14, aún no es tan improbable obtener estimadores de  $\gamma$  entre 0 y 3 en el caso de los estimadores  $A_1$  y  $A_2$ . En el caso del estimador  $A_3$  sólo hasta valores de  $\gamma$  tan altos como 9 se pueden tener estimadores

de este orden<sup>6</sup>. El Anexo B muestra la distribución de los estimadores de  $\gamma$ .

### GRAFICO N° 3

#### INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS ESTIMADORES GMM DE $\gamma$ .



Fuente: Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

El Cuadro N° 10 describe las estimaciones de los estimadores  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  respectivamente. En estos cuadros se puede observar que tanto la media como la mediana se encuentran siempre por debajo del verdadero valor de  $\gamma$ . También se puede observar que la probabilidad de obtener estimaciones de  $\gamma$  menores que 2 es siempre mayor que 0.05 para  $\gamma$  hasta 10. Desafortunadamente, en este caso, como en muchos otros en los que se estudian las propiedades de muestras pequeñas de un estimador, es difícil entender por qué se originan estos sesgos.

También se han computado los tests  $t$  tradicionales, donde la nula es el verdadero valor del parámetro. La distribución de estos estadígrafos para  $\gamma = 1, 5, 11$  y  $14$  se muestra en los Gráficos N° 4, 5 y 6<sup>7</sup>. Como se puede ver en estos gráficos, existe un importante sesgo hacia la izquierda que es cada vez mayor a medida que aumenta  $\gamma$ , con excepción del estimador  $A_3$ , donde la subestimación no tiene un comportamiento regular con respecto al valor de  $\gamma$ .

<sup>6</sup> El valor exacto de  $\gamma$  para el cual se resuelven estas controversias depende de la caracterización que se haga de la misma, por ejemplo, en Kocherlakota (1996) con un  $\gamma$  de 8,5 sería suficiente para que el premio al riesgo observado no fuese controversial, en tanto que en la caracterización más restrictiva de Hansen y Jagannathan (1991) se necesita un  $\gamma$  cercano a 30.

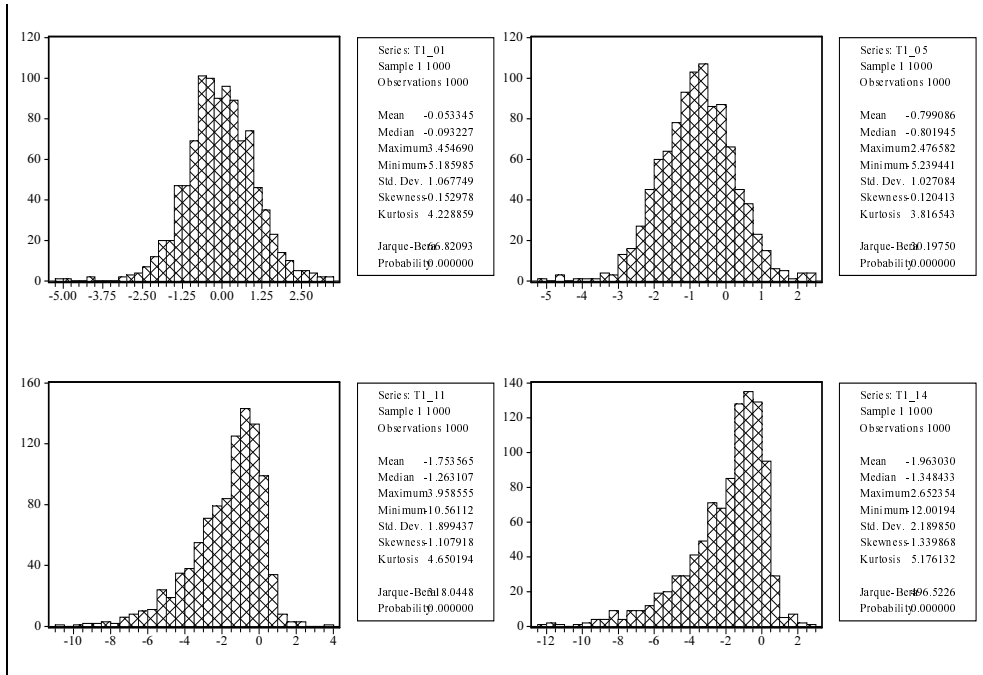
<sup>7</sup> para la distribución del test  $t$  con  $\gamma$  del 1 al 14 ver Anexo C.

**CUADRO N° 10**  
**DESCRIPCIÓN DE LAS PROPIEDADES DE MUESTRA PEQUEÑA DE**  
**LOS ESTIMADORES DE GMM PARA  $\gamma$**

$\gamma$	Media	Mediana	Desv. Est.	Pr $\{\gamma < 3\}$	Pr $\{\gamma < 2\}$
$A_1$					
2	1.43	1.50	3.42	0.78	0.60
6	4.17	3.93	3.34	0.31	0.15
10	6.83	6.35	4.63	0.08	0.06
14	9.33	8.64	6.23	0.06	0.05
$A_2$					
2	1.23	1.13	1.54	0.93	0.84
6	3.70	3.38	3.97	0.41	0.18
10	6.15	5.67	6.02	0.17	0.11
14	8.17	7.60	8.23	0.16	0.12
$A_3$					
2	-1.81	-0.58	4.13	0.98	0.93
6	2.41	2.49	2.91	0.60	0.41
10	6.65	6.23	3.23	0.10	0.05
14	11.42	10.82	3.95	0.01	0.00

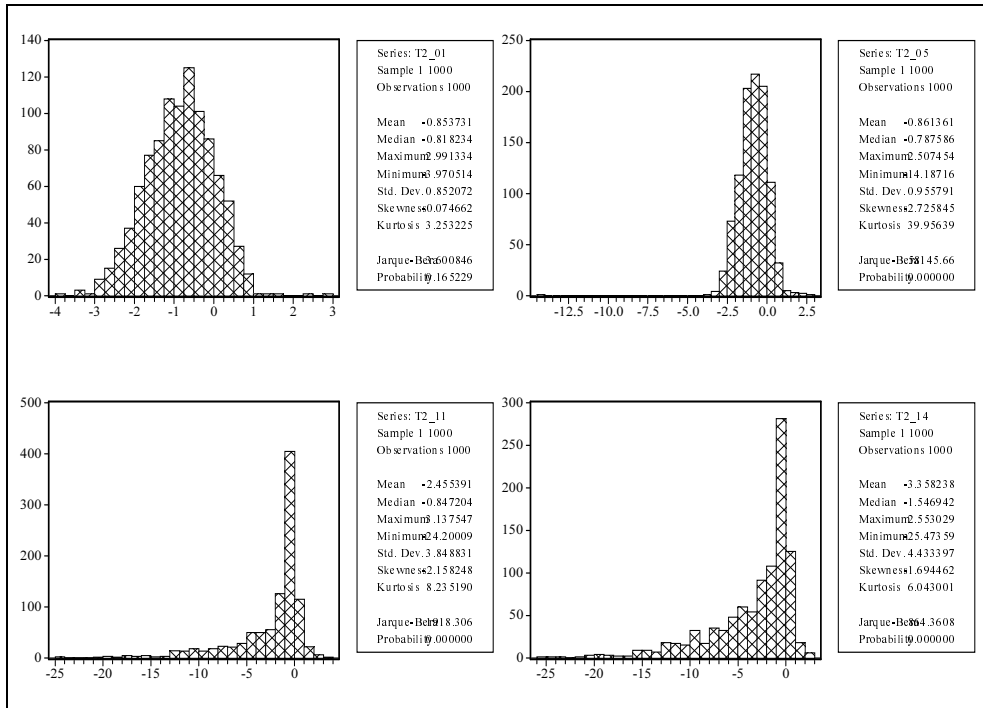
Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

**GRAFICO N° 4**  
**DISTRIBUCIÓN DEL TEST  $t$  DEL ESTIMADOR  $A_1$  PARA  $\gamma$ .**



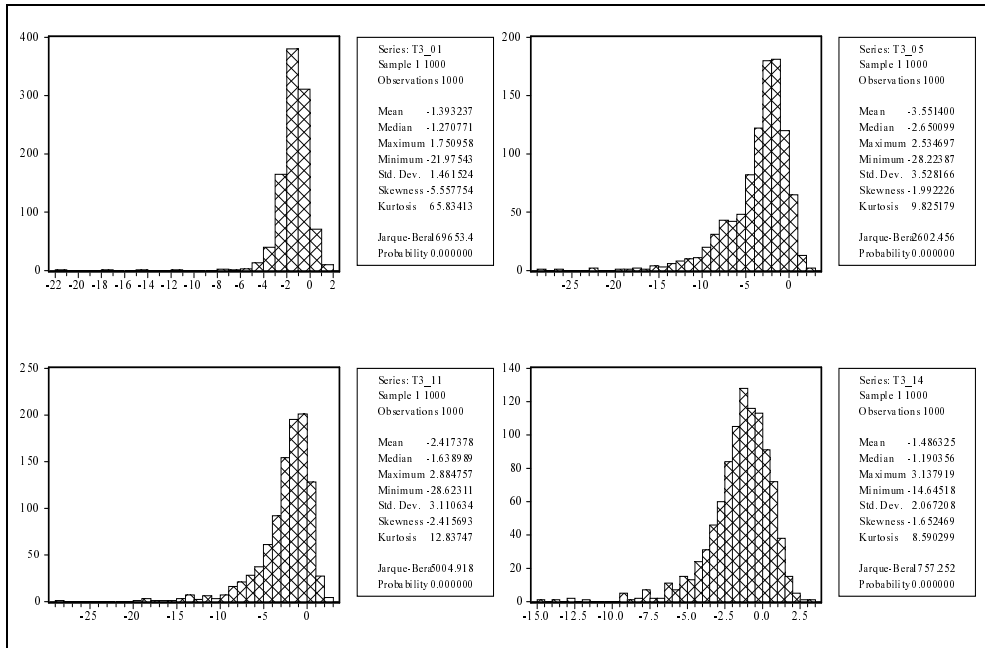
Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

**GRAFICO N° 5**  
**DISTRIBUCIÓN DEL TEST  $t$  DEL ESTIMADOR  $A_2$  PARA  $\gamma$ .**



Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_2$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

**GRAFICO N° 6**  
**DISTRIBUCIÓN DEL TEST  $t$  DEL ESTIMADOR  $A_3$  PARA  $\gamma$ .**



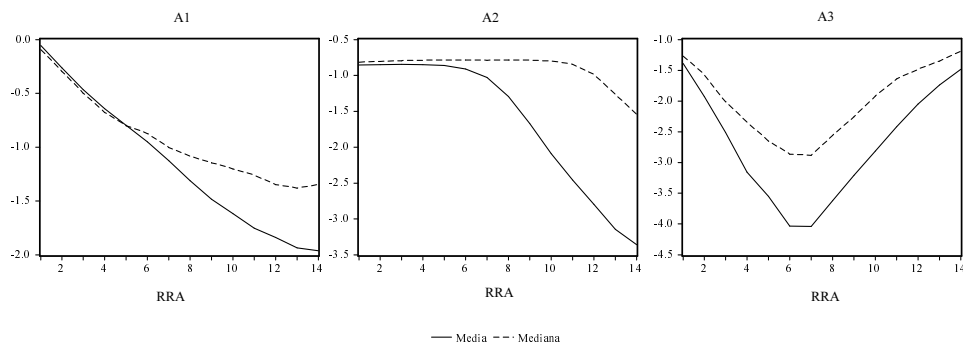
Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

Finalmente, el Gráfico N° 7 muestra las medias y medianas de los test  $t$ . Las medias y medianas siempre son menores que 0; y en el caso de los estimadores  $A_1$  y  $A_2$ , éstas son decrecientes respecto a  $\gamma$ .

Este ejercicio muestra que, incluso en un ambiente donde el modelo se encuentra correctamente especificado como en el experimento de Monte Carlo aquí realizado, la varianza de muestra pequeña del estimador de GMM para el coeficiente de aversión al riesgo es más bien amplia. Sin embargo, este experimento no es informativo respecto a si la especificación de este modelo es correcta. Esta discusión es abordada, al menos parcialmente, en Kocherlakota (1990).

Los ejercicios de esta sección muestran que  $\gamma$  podría ser mucho mayor que lo que creen la mayoría de los economistas, sin embargo, estas sugerencias deben ser complementadas con futuras investigaciones donde puedan obtenerse estimaciones de  $\gamma$  usando enfoques alternativos.

**GRAFICO N° 7**  
**MEDIA Y MEDIANA DEL TEST  $t$  PARA  $\gamma$ .**



Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

## V. CONCLUSIONES.

Esta última sección está dedicada a poner en relieve los principales resultados de los ejercicios realizados en este trabajo.

El primer ejercicio comienza con una discusión sobre las economías de *crash* de Rietz (1988) y Salyer (1998). En este trabajo se ha mostrado que tales economías son capaces de replicar los primeros momentos de la libre de riesgo y el premio al riesgo situando el sesgo y la *curtosis* de la tasa de crecimiento del consumo muy por debajo y muy por encima respectivamente del sesgo y *curtosis* observadas. Sin embargo, los datos no ofrecen suficiente evidencia para rechazar tales economías por sus implicancias para los momentos de la tasa de crecimiento del consumo.

En el segundo ejercicio se busca una mejor representación estadística para la tasa de crecimiento del consumo. Esta mejor representación es capaz de dar cuenta de los cambios en la primera autocorrelación y la varianza de la serie, sin embargo, cuando se resuelve el modelo para esta representación los resultados son muy similares a los encontrados por Mehra y Prescott (1985).

El tercer ejercicio muestra que algunas estimaciones de GMM para  $\gamma$ , inferiores a 3 han sido obtenidas a partir de estimadores sesgados hacia la izquierda, por lo cual  $\gamma$  podría ser mucho mayor que lo que muestran esas estimaciones. Incluso con  $\gamma$  mayores que 10 se podrían haber obtenido estimaciones menores que 3.



## VII. REFERENCIAS.

- BAI, J. y PERRON P. 1998a. Estimating and Testing Linear Models with Multiple Structural Changes. *Econometrica* (66): 47-78.
- BAI, J. y PERRON P. 1998b. Computation and Analysis of Multiple Structural Change Models. Manuscrito. Boston University.
- CHUMACERO, R. 1997. Finite Sample Properties of the Efficient Method of Moments. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*.
- GROSSMAN, S. and SHILLER R. 1981. The Determinants of the Variability of Stock Market Prices. *American Economic Review* (71): 222-227.
- HANSEN, L. 1982. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica* (50): 1029-1053.
- HANSEN, L. y JAGANNATHAN R. 1991. Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies. *Journal of Political Economy* (99): 225-262.
- HANSEN, L. y SINGLETON K. 1982. Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models. *Econometrica* (50): 1269-1286.
- HANSEN, L. y SINGLETON K. 1984. Errata. *Econometrica* 52, pp.267-268.
- KOCHERLAKOTA, N. 1990. On Tests of Representative Consumer Asset Pricing Models. *Journal of Monetary Economics* (26): 286-304.
- KOCHERLAKOTA, N. 1996. The Equity Premium: It's Still a Puzzle. *Journal of Economic Literature*, Vol. XXXIV: 42-71.
- MEHRA, R. y PRESCOTT E. 1985). The Equity Premium: A Puzzle. *Journal of Monetary Economics* 15 (2): 145-61.
- MEHRA, R. y E. PRESCOTT. 1988. The Equity Risk Premium: A Solution ?. *Journal of Monetary Economics* (22): 133-136.
- RIETZ, T. 1988. The Equity Risk Premium: A Solution. *Journal of Monetary Economics* (22): 117-131.
- SALYER, K. 1998. Crash States and the Equity Premium: Solving one Puzzle Raises Another. *Journal of Economic Dynamics and Control* (22): 955-965.
- TAUCHEN, G. 1986a. Finite State Markov Chain Approximations to Univariate and Vector

Autoregressions. *Economic Letters* (20) 177-181.

TAUCHEN, G. 1986b. Statistical Properties of Generalized Method-of-Moments Estimators of Structural Parameters Obtained from Financial Market Data. *Journal of Business & Economic Statistics* (4): 397-416.

TAUCHEN, G. y HUSSEY, R. 1991. Quadrature-Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to Nonlinear Asset Pricing Models. *Econometrica* 59 (2): 371-396.

### Anexo A: Discretización Basada en Métodos de Cuadratura.

La discretización basada en los Métodos de Cuadratura se caracteriza porque los puntos de las abcisas son escogidos en forma eficiente en el sentido que con  $N$  puntos,  $N-1$  momentos son replicados exactamente, siendo esto lo mejor que se puede hacer usando los momentos como criterio.

En las aplicaciones aquí desarrolladas se han usado los polinomios Gauss-Hermite para escoger las abcisas  $z_k$  y los pesos  $w_k$  asociados. Como estas abcisas corresponden a la distribución normal estándar, deben ser desestandarizadas usando la media y desviación estándar incondicionales para obtener las abcisas definitivas  $y_k$ . También debe escogerse una función de ponderación  $\omega(z)$ . En el caso de los modelos que implicaban dinámicas sólo de primer orden se usó la función de ponderación sugerida para los polinomios Gauss-Hermite:

$$\omega(z) = e^{-z^2}$$

Los componentes de la matriz de transición son asignados de la siguiente manera:

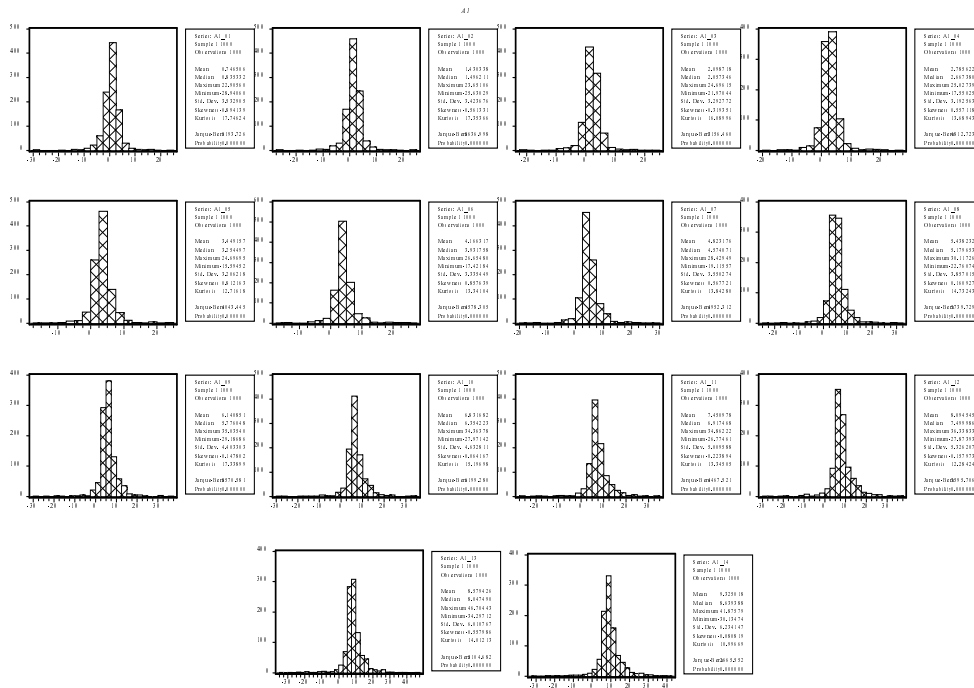
$$\phi_{ij} = \frac{f(y_j|x_j) w_j}{s(x_i) \omega(y_j)}$$

donde

$$s(x_i) = \sum_{j=1}^N \frac{f(y_j|x_j) w_j}{\omega(y_j)}$$

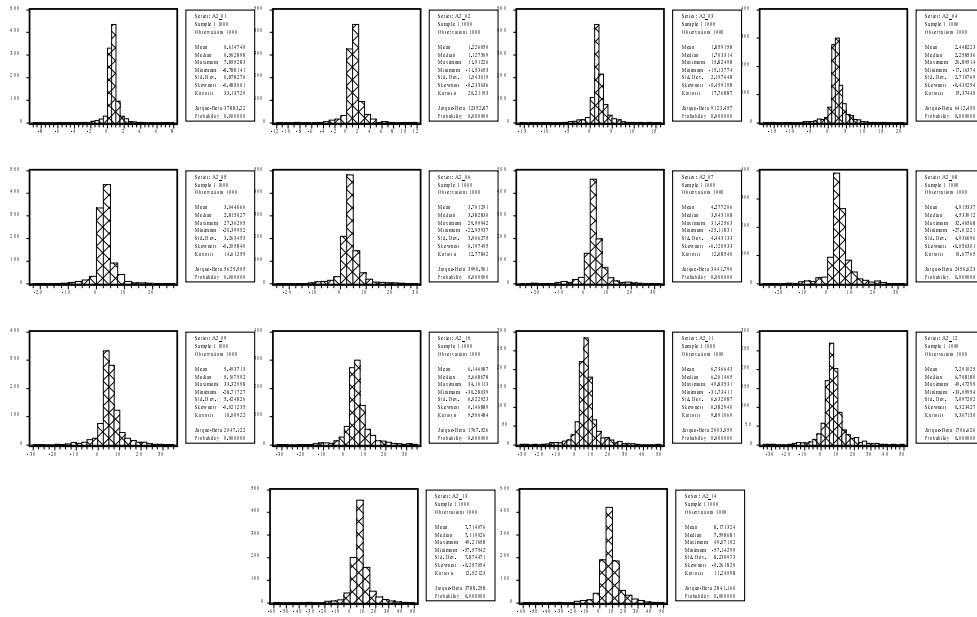
y  $f(y_j|x_j)$  corresponde a la función de distribución de  $y_j$  condicional al estado  $i$ .

**Anexo B: Distribución de los Estimadores de GMM para  $\gamma$ .**

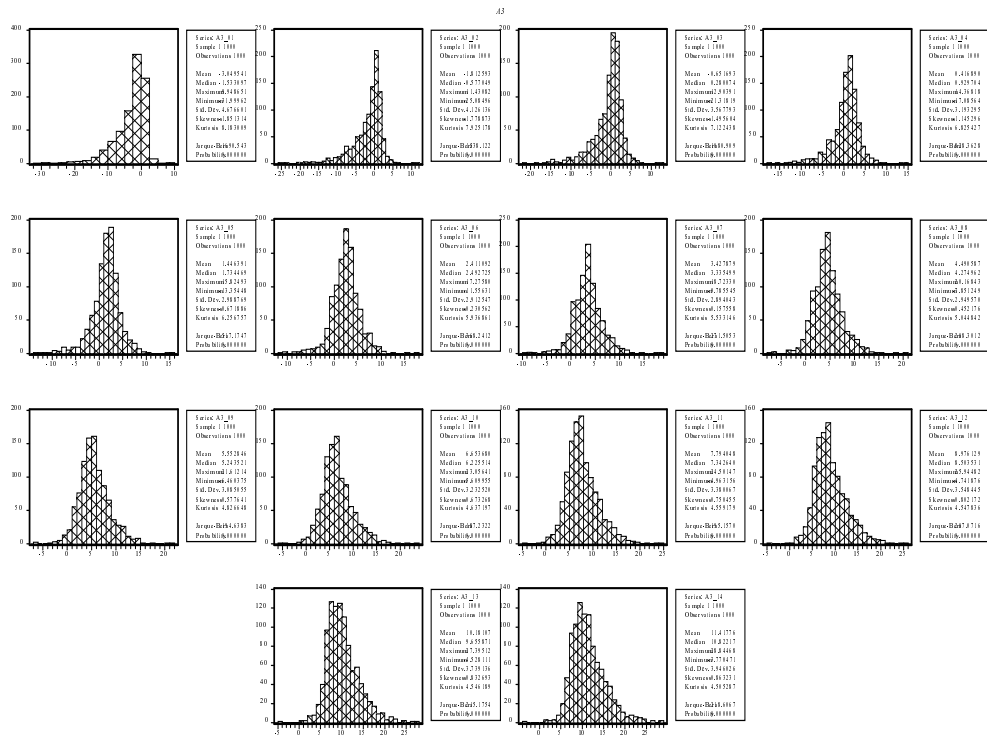


Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

42

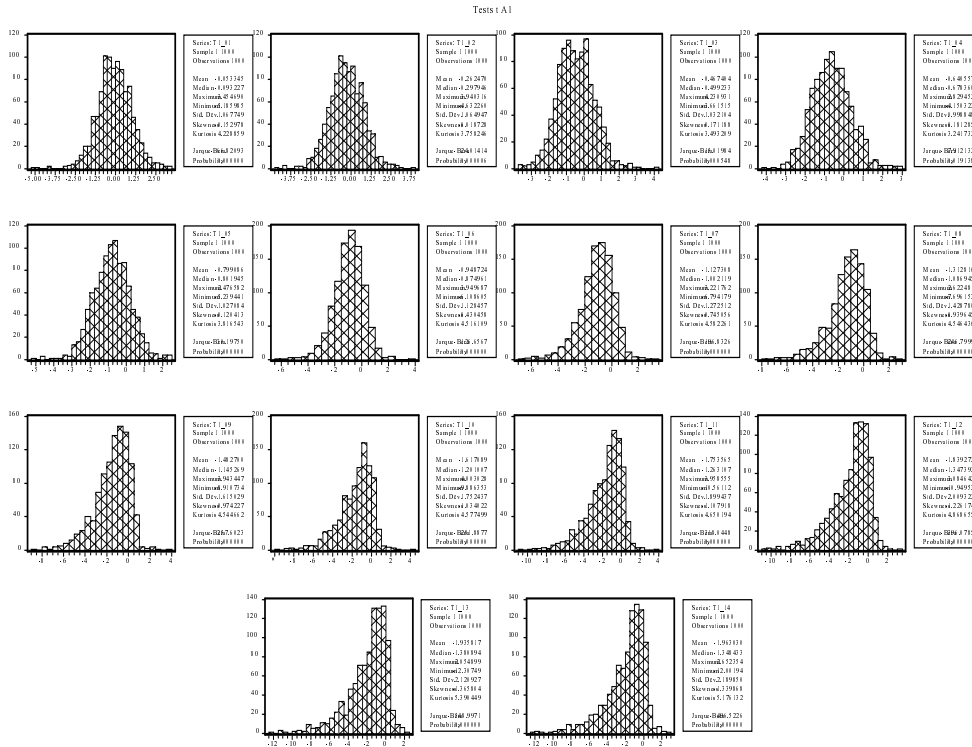


Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

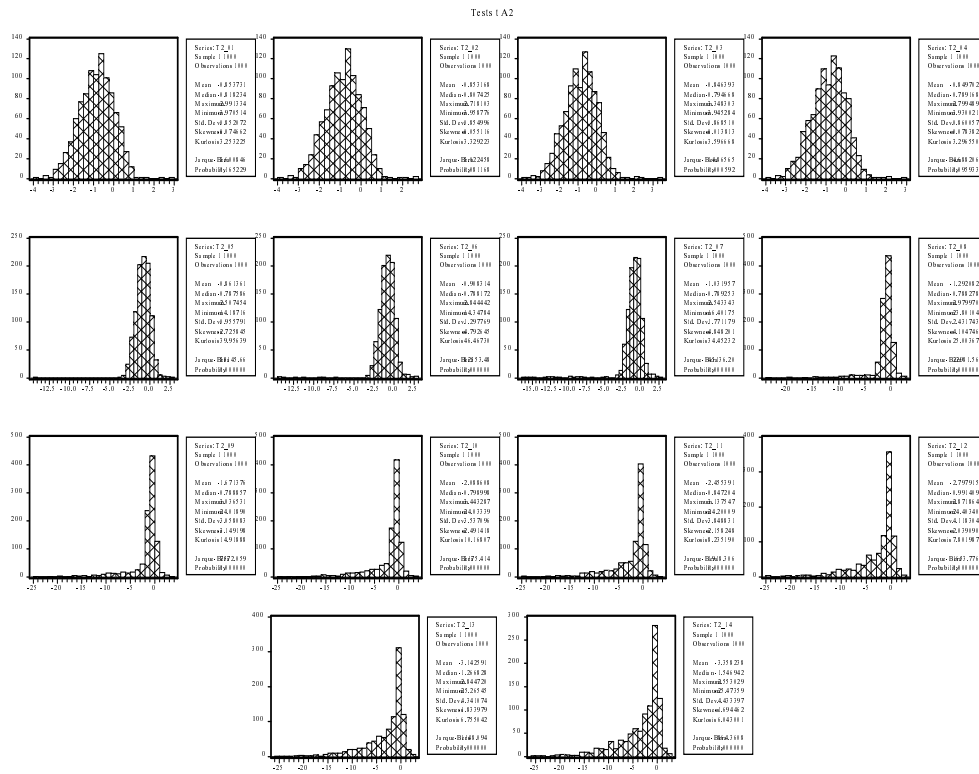


Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> y A<sub>3</sub> usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.

**Anexo C: Distribución del Test  $t$  de los Estimadores de GMM para  $\gamma$ .**



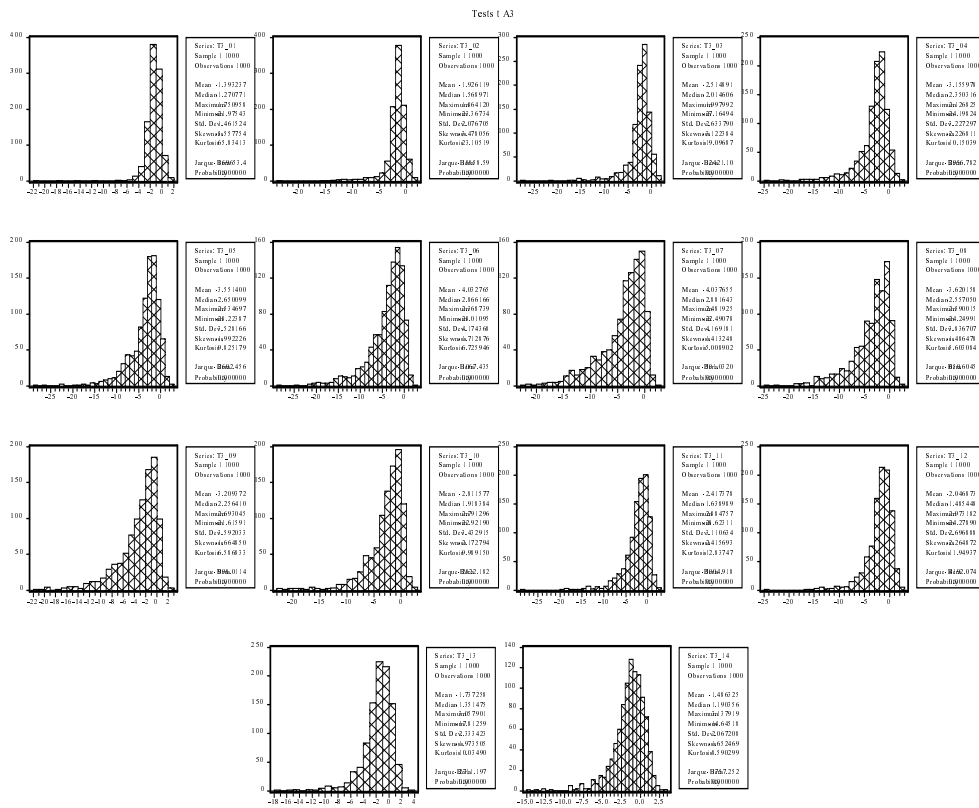
Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.



Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descriptos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descriptas en el Cuadro N° 9.



Sobre la controversia del premio al riesgo /Oyarzún C.



Fuente: Elaboración propia. Se han realizado 1.000 simulaciones para cada estimación. La estimaciones de GMM han sido realizadas con los instrumentos descritos para  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  usando las condiciones de ortogonalidad descritas en el Cuadro N° 9.