Super-Tarea de Métodos Matemáticos 2

O. Castillo-Felisola

24 de Marzo del 2006

Indicaciones

- Se recomienda que intenten primero los ejercicios de calentamiento.
- Los problemas que serán evaluados en el examen son de complejidad similar a la de los problemas.
- El plazo para cumplir con la tarea es aproximadamente 5 días para los problemas de calentamiento y 4 días adicionales para los problemas tipo examen. Estos tiempos están estimados para el tiempo que durará la prueba.
- Las consultas son válidas. Of. 616.
- Pregunten en la clase de consultas los días viernes a las 12 pm.

Problemas de Calentamiento

1. En un espacio euclídeo $\mathbb{E}^n$, no existe diferencia entre componentes covariante y contra-variante de un vector, así que $V^a = V_a$. Escriba explícitamente las componentes del producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^a B_a = \sum A^a B^a$, cuando $n = 6$.
2. Recuerde que la generalización del producto escalar viene dada por $\vec{A} \cdot \vec{B} = g_{ab} A^a B^b$. Considerando una métrica general escriba explícitamente la expresión para el producto escalar cuando $n = 4$.
3. ¿Qué significa que una métrica sea diagonal?¿Bajo qué condiciones una métrica (matriz) puede ser diagonalizada?¿ Puede ser toda métrica diagonalizada? Considere la métrica

$$g = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

¿Cúal es la correspondiente métrica diagonal y la transformación que la diagonaliza?

4. ¿Cúantas compomentes independientes tiene un tensor de rango 2 que es

   - arbitrario?
   - antisimétrico?
   - simétrico?

5. Defínase la simetrización o anti-simetrización de un tensor por las expresiones,

$$T_{(ab\dots n)} = \frac{1}{n!}\sum_{perm.} T_{\sigma(a)\sigma(b)\dots\sigma(n)}, \quad (2)$$

$$T_{[ab\dots n]} = \frac{1}{n!}\sum_{perm.} (-1)^{|\sigma|} T_{\sigma(a)\sigma(b)\dots\sigma(n)}, \quad (3)$$

   respectivamente. Estas son sumas sobre las permutaciones de los valores posibles de los índices, y $|\sigma|$ es el orden de la permutación.

   Muestre que para $n = 2$, un tensor puede escribirse como la suma de su parte simétrica y anti-simétrica.

6. ¿Cúantas componentes independientes tiene un tensor arbitrario de rango m en un espacio n-dimensional?¿Cúantas componentes tiene si es totalmente simétrico o totalmente anti-simétrico?

7. En dimensión $n = 3$, calcule $\epsilon_{abc}V^aV^bW^c$. Explique por qué este resultado.

8. ¿Cúantas componentes independientes tiene un tensor totalmente anti-simétrico de rango p en un espacio de dimensión $n < p$?.

9. Usando la definición de los símbolos de Christoffel, muestre que

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}. \quad (4)$$

   Dada esta simetría, ¿Cúantas componentes independientes de los símbolos de Christoffel pueden existir en un espacio n-dimensional?

10. Definase el producto tensorial, $\otimes$, de la manera siguiente. Consideremos una base para el espacio vectorial $\{e_a\}$, entonces, una base para el espacio de tensores de rango m está dada por

$$e_{a_1} \otimes e_{a_2} \otimes \cdots \otimes e_{a_m}.$$

   Escriba en notación matricial las siguientes expresiones (suponga el espacio 3-dimensional)

- $e_1 \otimes e_1$,
- $e_1 \otimes e_2$,
- $(e_2 + e_3) \otimes (e_1 + e_3)$,
- Suponga $A^i = (1, 3, 4)$, $B^i = (2, 1, -2)$ y $C^i = (2, 1, 0)$, Calcule:
  - $(A \otimes B) \cdot C$
  - $C \cdot (A \otimes B)$.

11. ¿Cúal de los siguientes tensores es simétrico, anti-simétrico o ninguno?
    - $e_1 \otimes e_2$
    - $e_3 \otimes e_3$
    - $e_3 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2$
    - $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \tag{5}$$
    - $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & 4 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \tag{6}$$
    - $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \tag{7}$$
    - $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

12. Una superficie cuadrática tiene una ecuación de la forma
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fxy + 2gxz + 2hyz = 1. \tag{9}$$
Muestre que los coeficientes transforman como las componentes de un tensor simétrico de rango 2. Muestre entonces que la ecuación se puede escribir como
$$X^t M X = 1, \tag{10}$$
donde $X = (x, y, z)$ y M es un tensor simétrico.

13. Muestre que la relación $M \cdot V = \lambda V$ es invariante bajo rotaciones. Hint: recuerde que las rotaciones son elementos del grupo $SO(n)$.

14. Muestre que la simetría es una propiedad invariante de un tensor.

15. Sabemos que $\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} e_a \otimes \omega^b$, donde ω^b son los vectores bases en el espacio dual. Muestre que $\vec{\nabla}\vec{r} = \mathbb{1}$ y $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = n$.

16. El epsilon de Leví-Civita es un tensor totalmente anti-simétrico de rango igual a la dimensión del espacio donde esta definido y con norma 1 (es decir, $\epsilon_{12\ldots n} = 1$). Muestre que se puede escribir el producto vectorial de vectores como $\vec{A} \times \vec{B} = e_a A_b B_c \epsilon^{abc}$. Note que el resultado del producto vectorial de vectores no es un vector como los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para ver esto transforme las componentes de los vectores y las bases por -1 y vea el resultado sobre el vector $\vec{A} \times \vec{B}$. A este tipo de vectores se les llama vectores axiales.

17. En el problema anterior, vimos que los vectores definidos via un producto vectorial de vectores no son realmente vectores. Esto es porque en dimension el epsilon de Leví-Civita provee una relación entre tensores de rango 2 y los vectores, como se sigue

$$V^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc} T_{bc}, \qquad T_{ab} = \epsilon_{abc} V^c. \tag{11}$$

Sabemos que el momento angular es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, por lo dicho anteriormente halle el tensor momento angular L_{ab}.

18. En $n = 2$, calcule explícitamente

- $\epsilon_{ab}\epsilon^{bc}$
- $\epsilon_{ab}\epsilon^{ab}$.

En $n = 3$, calcule explícitamente

- $\epsilon_{abc}\epsilon^{adf}$
- $\epsilon_{abc}\epsilon^{abd}$
- $\epsilon_{abc}\epsilon^{abc}$.

En general,

$$\epsilon^{j_1 \cdots j_l a_1 \cdots a_n} \epsilon_{j_1 \cdots j_l b_1 \cdots b_n} = l!\ \epsilon^{a_1 \ldots a_n}_{b_1 \ldots b_n}, \tag{12}$$

donde

$$\epsilon^{a_1 \ldots a_n}_{b_1 \ldots b_n} = \delta^{a_1 \ldots a_n}_{b_1 \ldots b_n} = \begin{vmatrix} \delta^{a_1}_{b_1} & \cdots & \delta^{a_n}_{b_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta^{a_n}_{b_n} & \cdots & \delta^{a_n}_{b_n} \end{vmatrix} \tag{13}$$

19. En las ecuaciones (11), la operación para pasar de vector a tensor o viseversa es conocida como dualidad de Hodge y se denota con una estrella (*) delante del objeto a transformar. Demuestre que $*(*V) = V$, para ello utilize la propiedad (12).

20. Recordando que en coordenadas curvilineas la derivada es $\nabla_a \psi = \partial_a \psi$, determine una expresión para el gradiente en coordenadas curvilíneas. Hint: El gradiente es un operador tal que actuando sobre funciones dá un vector (un vector de verdad...).

21. De la definición de los s'imbolos de Christoffel, muestre que para sistemas de coordenada curvilíneos ortogonales, estos se reducen a
    - $\Gamma_{abc} = 0$
    - $\Gamma_{aaa} = \frac{1}{2}\partial_a g_{aa}$
    - $\Gamma_{baa} = -\frac{1}{2}\partial_b g_{aa}$
    - $\Gamma_{aab} = \frac{1}{2}\partial_b g_{aa}$
    - $\Gamma_{bab} = \frac{1}{2}\partial_a g_{ab}$.
22. De la definición del Riemann, muestre que
    - $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{abdc}$.
    - $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{bacd}$.
    - $\mathcal{R}_{abcd} = \mathcal{R}_{cdab}$.
    - $\mathcal{R}_{a[bcd]} = 0$.

Problemas tipo examen

1 Expresiones vectoriales

Muestre que en $\mathbb{E}^3$ las siguientes identidades, utilizando la notación de índices.

- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.
- $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}$.
- $\vec{\nabla} \cdot (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \cdot \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$.
- $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\phi) \times \vec{A} + \phi(\vec{\nabla} \times \vec{A})$.
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$.
- $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot (\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$.
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$.
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$.

2 Determinantes de matrices

1. Utilizando la notación tensorial, muestre que para $n = 2$, se satisface

$$det(AB) = det(A)det(B). \tag{14}$$

   Este resultado es cierto para n arbitrario.

3 Operadores diferenciales en coordenadas curvadas

Para cada uno de los casos siguientes, realice los pasos descritos abajo.

- $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y $z = z$.
- $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ y $z = r\cos\theta$
- $x = uv\cos\phi$, $y = uv\sin\phi$ y $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$.
- $x = (R + r\cos\theta)\cos\phi$, $(R + r\cos\theta)\sin\phi$ and $z = r\sin\theta$, en este caso R y r son constantes.

1. Calcule la métrica en las nuevas coordenadas.
2. Invierta la métrica.
3. Escriba el operador Laplaciano en dichas coordenadas.

4 Símbolos de Christoffel en coordenadas polares

1. Considere los vectores unitarios en coordenadas polares e_r y e_θ. Escriba sus compomentes en coordenadas cartesianas (asegurese que los vecetores sean unitarios).
2. Calcule la derivada (temporal) de los vectores bases polares, y exprese los resultados en términos de los vectores bases polares (en caso de ser posible).
3. Escriba el vector posición en coordenadas polares y calcule la aceleración. Recuerde que debe derivar las bases.
4. Compare el resultado obtenido con la ecuación

$$\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0, \tag{15}$$

   para obtener los valores de los símbolos de Christoffel.

5 La métrica es covariantemente constante

1. La derivada covariante está definida para que el objeto geométrico final transforme como un tensor. Así pues,

$$(D_a V)_b = \partial_a V_b - \Gamma^m_{ab} V_m. \tag{16}$$

La generalización a tensores de rango arbitrario es

$$\begin{aligned}(D_s T)^{ab\ldots}_{mn\ldots} &= \partial_s T^{ab\ldots}_{mn\ldots} + \Gamma^a_{st} T^{tb\ldots}_{mn\ldots} + \Gamma^b_{st} T^{at\ldots}_{mn\ldots} + \cdots \\ &\quad - \Gamma^t_{sm} T^{ab\ldots}_{tn\ldots} - \Gamma^t_{sn} T^{ab\ldots}_{mt\ldots} - \cdots \end{aligned} \tag{17}$$

(No,... no es error, no hay pregunta en esta parte, es una parte menos por hacer).

2. Use la definición de los símbolos de Christoffel para mostrar que $D_a g = 0$

6 Derivada Extrerior

1. Considere la transformación del objeto geométrico $\partial_a V_b$ bajo un cambio de coordenadas.

2. Defina el objeto geométrico $(\mathrm{d}V)_{ab} = \partial_a V_b - \partial_b V_a$, y considere sus transformaciones bajo cambio de coordenadas.

   Los tensores covariantes totalmente antisimétricos de rango k son conocidos como k-formas, y su derivada antisimetrizada, llamada derivada exterior de la k-forma, es una $k+1$-forma.

3. Muestre que $\mathrm{d}^2 = 0$ para cualquier k-forma. Esta propiedad se conoce como nilpotencia de la derivada exterior.

7 Grupos e isometrías de espacios

Como se dijo en la clase, se puede halar los grupos de isometría de las métricas. Halle las isometrías de las siguientes métricas.

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

- $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

- $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Los elementos hallados forman parte de 3 grupos importantes en la física; $SO(2)$, que es el grupo de rotaciones en espacio euclídeo 2-dimensiones; $SO(1,1)$, el grupo de Boost de Lorentz en 1+1-dimensiones (espacio de Minkowskii 2-dimensional); y $Sp(1)$, el grupo simplectico 1-dimensional, que sera importante en los cursos avanzados de mecánica clásica.

8 Cálculo de variaciones y geodésicas

1. Generalmente interpretamos la geodésica como la distancia más corta entre dos puntos. De la definición es evidente que necesitaremos un proceso de optimización. Para minimizar funcionales, se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrage,
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^a}\right) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^a}. \tag{21}$$
Muestre que la variación de $\mathscr{L}' = \mathscr{L}^2$ dá origen a las mismas ecuaciones de movimiento (es decir, a las mismas ecuaciones de Euler-Lagrange)

2. Considere el Lagrangeano dado por $\mathscr{L} = \sqrt{g_{ab}(x)\dot{x}^a\dot{x}^b}$, y obtenga las ecuaciones de movimiento. Hint: Aplique el truco del item anterior.

3. Puesto que los $\dot{x}^a$'s commutan, debemos simetrizar los términos que no sean explicitamente simétricos que esten contraidos con un par de $\dot{x}^a$'s. Reacomode los términos y todo lo que acompagne a los $\dot{x}^a$'s llámeles Γ^a_{bc}.

   Esta ecuación es la ecuación de la geodésica.

9 Cálculo de símbolos de Christoffel

Usando el método el problema 8, calcule los símbolos de Christoffel para las métricas cuyos elementos de línea son

- $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.
- $ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$. Note que r es un parámetro.
- $ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$.

10 Cálculo de curvatura de la 2-esfera

1. En el problema 9 calculamos los símbolos de Christoffel. Derívelos con respecto a las variables que corresponda.
2. Construya las contracciones de Christoffels indicadas en la definición del tensor de Riemann.
3. Construya las componentes del tensor de Riemann.
4. Contrayendo con la métrica ó la métrica inversa (o con lo que sea necesario), halle el tensor de Ricci y el escalar de curvatura.

11 Componentes independientes del Riemann

Como mostramos anteriormente, el tensor de Riemann satisface

- $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{abdc}$.
- $\mathcal{R}_{abcd} = -\mathcal{R}_{bacd}$.
- $\mathcal{R}_{abcd} = \mathcal{R}_{cdab}$.
- $\mathcal{R}_{a[bcd]} = 0$.

1. Los índices a y b son anti-simétricos bajo intercambio. ¿Cúantos posibles combinacioines hay para este par?. Lo mismo para los índices c y d.
2. Bajo intercambio de los pares ab y cd, el Riemann es simétrico. ¿Cúantas posibles combinaciones se tiene en total para el Riemann?. Compare con el total de componentes independientes para un tensor de rango 4 arbitrario.
3. Finálmente, la primera identidad de Bianchi representa un número adicional de constrints entre las componentes del Riemann. Como se ha anti-simetrizado los tres últimos índices, junto con la simetría entre a y b, el número de constraints es igual a el número de componentes independientes de un tensor de rango 4 totalmente anti-simétrico. ¿Cúantas componentes independientes tiene finalmente el Riemann?

12 Ecuaciones de Einstein

Adicionalmente a las simétrias descritas en 11, el Riemann tiene otra simetría

$$\mathcal{R}_{ab[cd;f]} = 0, \tag{22}$$

que es conocida como la segunda identidad de Bianchi.

1. A partir de la segunda identidad de Bianchi, muestre que

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0, \tag{23}$$

donde $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R}$. Éste tensor es conocido como el tensor de Einstein.

2. Muestre que $G_{\mu\nu}$ es simétrico. ¿Cúantas ecuaciones hay en la expresión $G_{\mu\nu} = 0$?

3. Muestre que $G_{\mu\nu} = 0$ es equivalente a $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$.

La física de este problema es parte de relatividad general, el tensor de Einstein describe la geometría de la gravitación, y se pide que sea sin divergencia para que la materia satisfaga la ecuación de continuidad. Finalmente, si queremos resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío, es equivalente pedir que $G_{\mu\nu} = 0$ o que $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$.