Hipergrafos

Pablo Sáez

pablosaezphd@gmail.com

Definiciones

Suponemos dado un conjunto A (finito). Una *hiperarista* es un subconjunto de A. Un *hipergrafo* es un conjunto de hiperaristas.

Dado un hipergrafo $\mathcal{H}$:

- $\mu(\mathcal{H}) = \{X \in \mathcal{H}; \neg\exists Y \in \mathcal{H}, Y \subset X \wedge X \neq Y\}$ es el conjunto de hiperarisas minimales de $\mathcal{H}$ (si $\mathcal{H}$ representa a un conjunto de cláusulas (positivas) es como sacarle las cláusulas redundantes)
- $\nu(\mathcal{H}) = \{X \subseteq A; \exists Y \in \mathcal{H}, Y \subseteq X\}$ es el conjunto de los X que son respondidos por $\mathcal{H}$ (si $\mathcal{H}$ representa a un conjunto de cláusulas entonces $\nu(\mathcal{H})$ son los queries que son respondidos afirmativamente, dado $\mathcal{H}$)
- $\tau(\mathcal{H}) = \{X \subseteq A; \forall Y \in \mathcal{H}, X \cap Y \neq \emptyset\}$ (serían los modelos de $\mathcal{H}$)
- $\lambda(\mathcal{H}) = \mu(\tau(\mathcal{H}))$ es el conjunto de transversales minimales (vendrían siendo los modelos mínimos, también conocidos como *answer sets*)

Ejemplos:

- $\{3,4,5\} \in \nu(\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$
- $\{1,2,3\} \in \tau(\mathcal{H}); \{1,3\},\{2,3\} \in \lambda(\mathcal{H})$

Hipergrafos minimales

Podemos restringirnos a los hipergrafos minimales?

Observaciones:

- El cálculo de $\mu(\mathcal{H})$ es polinomial (simplemente comparar todos los $X \in \mathcal{H}$ con todos, por ejemplo).
- Dada la relación de equivalencia $\mu(\mathcal{H}) = \mu(\mathcal{H}')$ trabajaríamos con el representante $\mu(\mathcal{H})$.
- Si $\mathcal{H} = \mu(\mathcal{H}')$ claramente $\nu(\mathcal{H}) = \nu(\mathcal{H}')$, es decir la clase de equivalencia "funciona" para efectos de ν.
- También tenemos: $\tau(\mathcal{H}) = \tau(\mathcal{H}')$.
- En realidad estamos con una abstracción de la lógica proposicional, y en la lógica proposicional es usual borrar las cláusulas redundantes.

Es decir: la respuesta parece ser: sí.

The problem

Habíamos quedado en que queríamos decidir, dados $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ (minimales, de acuerdo a la transparencia anterior), si $\mathcal{K} = \lambda(\mathcal{H})$.

Notar que:

- $\nu(\nu(\mathcal{H})) = \nu(\mathcal{H})$ (operador idempotente).
- Por definición todos los $X \in \tau(\mathcal{H})$ se intersectan con todos los $Y \in \mathcal{H}$, luego un $Y \in \mathcal{H}$ es una transversal de $\tau(\mathcal{H})$ (y cualquier superconjunto de Y también); y por otro lado si $\mathcal{H}$ es minimal y X no es superconjunto de ningún $Y \in \mathcal{H}$ entonces podemos encontrar una transversal de $\mathcal{H}$ que no se intersecta con X, luego $X \notin \tau(\tau(\mathcal{H}))$. Es decir: $\tau(\tau(\mathcal{H})) = \nu(\mathcal{H})$.

Por lo tanto $\lambda(\lambda(\mathcal{H})) = \mathcal{H}$, si $\mathcal{H}$ es minimal.

Es decir que nuestra pregunta es $\textit{simétrica}$.

Operatoria

Considerando que la unión de conjuntos es un constructor para $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ estaremos interesados en general en calcular $f(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')$, para hipergrafos minimales $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ y para funciones f. Por ejemplo:

- $\mu(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')$ (es un cálculo polinomial)
- $\lambda(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}') = \mu(\tau(\mathcal{H} \cup \mathcal{H}')) = \mu(\tau(\mathcal{H}) \cap \tau(\mathcal{H}')) = \mathcal{K}$.

Claim: si $\mathcal{K}' = \{X \cup Y; X \in \lambda(\mathcal{H}) \wedge Y \in \lambda(\mathcal{H}')\}$ entonces $\mu(\mathcal{K}') = \mathcal{K}$.

Observación: el primer operador es el $join$ del lattice de hipergrafos irredundantes (en la definición, el $join$ de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$), el segundo corresponde al $meet$ en ese lattice (en el ejemplo, el $meet$ de $\lambda(\mathcal{H})$ con $\lambda(\mathcal{H}')$). Notar que el cálculo de ambos operadores es polinomial en el largo de los inputs.

Con lo cual tenemos el $algoritmo\ de\ Berge$ para el cálculo de $\lambda(\mathcal{H})$:

$$\lambda(\mathcal{H}_1 \cup ... \cup \mathcal{H}_k) = meet(meet(..., \lambda(\mathcal{H}_{k-1})), \lambda(\mathcal{H}_k)).$$

Notar que si $\mathcal{H}_i = \{X_i\}$ entonces $\lambda(X_i) = \{\{a\}, \{b\}, ...\}$ si $X = \{a, b, ...\}$.

Problemas con el algoritmo de Berge

Supongamos

$$\mathcal{H} = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, ..., \{a_k, b_k\}\}.$$

Entonces claramente la cantidad de elementos en $\lambda(\mathcal{H})$ es exponencial en k.

Pero hay ejemplos más problemáticos.

Sea $\mathcal{H}_k = \{X \subseteq A; |X| = k\}$. Se puede ver que si $|A| = n$ entonces $\lambda(\mathcal{H}_k) = \mathcal{H}_{n-k+1}$. En particular: $\lambda(\mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_{n-1}$. Notar que ambos hipergrafos son de tamaño polinomial en n; pero usando el algoritmo de Berge el cálculo de $\mathcal{H}_{n-1}$ a partir de $\mathcal{H}_2$ podría pasar por la etapa exponencial de más arriba. Es decir:

Lema: el algoritmo de Berge es exponencial en el peor caso.

A pesar de lo cual es satisfactorio en la mayor parte de los casos, y se han ideado variantes (ej. Kavvadias y Stavropoulos, 1999).

Otros algoritmos

El *slicing algorithm* (Polyméris, 2008): dado un ordenamiento $a_1, ..., a_n$ de los elementos de A y un hipergrafo $\mathcal{H}$ sobre A:

1. Encontrar $max_{X \in \mathcal{H}} min_{a_i \in X} i$. Desplegar a_i.
2. Borrar de $\mathcal{H}$ todos los X que incluyan a a_i.
3. Si $\mathcal{H} \neq \emptyset$ volver a 1.

Este algoritmo produce un $X \in \lambda(\mathcal{H})$. Se puede demostrar que para cada $X \in \lambda(\mathcal{H})$ existe un ordenamiento que lo genera.

Hay también algoritmos basados en $pivoteos$: elegir un $a_i \in A$ y calcular los $X \in \lambda(\mathcal{H})$ que contienen a a_i y los que no contienen a_i.

El algoritmo de Fredman y Khachiyan es de este tipo.

Coherencia, Completitud

Volviendo al problema en su formulación proposicional, queremos saber si una DNF (monótona) es o no equivalente a una CNF (monótona). Esto produce dos implicaciones:

- $DNF \supset CNF$, o, lo que es lo mismo, $CNF_1 \vee CNF_2$ debe ser una fórmula válida, donde CNF_1 es antítona (supongamos, de m cláusulas) y CNF_2 es monótona (supongamos, de n). Aplicando distributividad obtenemos una CNF de mn cláusulas, que deben ser válidas o, lo que es lo mismo, contener al mismo tiempo p y $\neg p$, para algún literal p.

  En la terminología original, de hipergrafos, cada hiperarista de $\mathcal{H}$ debe intersectarse con cada hiperarista de $\mathcal{K}$. Este problema, que es evidentemente polinomial, lo llamamos *coherencia* de estructuras (estructura = par de hipergrafos).

- $CNF \supset DNF$, o, lo que es lo mismo, chequear que una DNF es válida. Esto equivale a chequear que una CNF es contradictoria, en donde una parte de la CNF es monótona y la otra parte es antítona. Se puede demostrar (Polyméris et al, 2002) que este problema tipo SAT sigue siendo NP-completo.

  En la terminología de hipergrafos, llamamos a esto el problema de la *completitud* de estructuras.

El lema de Chvátal

Es un lema válido para cualquier problema tipo SAT, no sólo el problema de completitud de estructuras.

Ejemplo: la CNF $\{p, \neg p\}$ es contradictoria en la medida en que la primera cláusula "abarca" a la mitad de los puntos del hipercubo y la segunda cláusula abarca a la otra mitad. O sino: $\{p, \neg p \vee q, \neg q\}$. La primera cláusula abarca 50%, la segunda 25% y la tercera 50%. Está claro que las cláusulas de un problema tipo SAT deben sumar (aritméticamente) por lo menos el 100% de los puntos del hipercubo para que el conjunto de cláusulas sea contradictorio (la inversa no es cierta, obviamente).

Como una cláusula de k literales abarca 2^{-k} del hipercubo, se debe tener

$$\Sigma_{i=1}^{C} 2^{-k_i} \geq 1,$$

donde k_i es la cantidad de literales de la cláusula i y C es la cantidad total de cláusulas.

Interesémosnos ahora en la *cláusula más pequeña* del conjunto. Supongamos que es la cláusula l. Es decir $k_l \leq k_j$ para $j = 1, ..., C$. Entonces:

$$1 \leq \Sigma_{j=1}^{C} 2^{-k_i} \leq \Sigma_{j=1}^{C} 2^{-k_l} = 2^{-k_l} C,$$

es decir $0 \leq \log C - k_l$, o bien $k_l \leq \log C$.

Debe haber una hiperarista de tamaño logarítmico (o menor) en $|\mathcal{H}| + |\mathcal{K}|$! (ojo, que pudiera darse esto por ser $|\mathcal{H}| + |\mathcal{K}|$ exponencial y k_l lineal).

Algoritmo de Fredman y Khachiyan, 1996

En términos cualitativos, el lema de Chvátal dice que hay una hiperarista "chica" (en alguno de los dos hipergrafos). De no existir tal hiperarista, podemos decir inmediatamente que la estructura no es dual.

Luego podemos chequear la coherencia de la estructura (si no es coherente no es dual y chao).

Si es coherente y hay hiperarista chica (supongamos $X \in \mathcal{H}$), por pigeon hole principle, como cada hiperarista de $\mathcal{K}$ se intersecta con X entonces necesariamente hay un punto de X que se intersecta con "muchas" hiperaristas de $\mathcal{K}$, concretamente con más de

$$\frac{|\mathcal{K}|}{\log(|\mathcal{H}| + |\mathcal{K}|)}.$$

Luego, al pivotear en ese punto se reduce "mucho" el *tamaño del problema*, y haciendo el análisis de complejidad en detalle se obtiene que esto arroja un algoritmo

$$O(n^{\log n}),$$

donde n, el tamaño del problema, es $|A|(|\mathcal{H}| + |\mathcal{K}|)$.

Consideraciones de complejidad computacional

Desde el punto de vista de las clases de complejidad, el problema de dualidad de hipergrafos se puede clasificar en la clase co-β_2P (Eiter et al, 2003).

La clase β_2P es análoga a la clase NP en el siguiente sentido: así como para la clase NP existen "certificados" para las instancias de cada problema de tamaño polinomial y algoritmos polinomiales de chequeo del certificado, en la clase β_2P existen certificados pero de tamaño polinomial en el *logaritmo* del tamaño de la instancia (y algoritmos polinomiales de chequeo de esos certificados).

Y luego la clase co-β_2P es, del mismo modo, análoga a la clase co-NP.

El resultado de Takata

Respecto del algoritmo de Berge, habíamos quedado en que era exponencial en el peor caso.

Pero quedaba la siguiente duda: no será que el problema con el algoritmo de Berge es que "tontamente se elige mal el orden en el cual se van tomando los elementos de un hipergrafo"?

Takata encontró (Takata, 2002) una clase de hipergrafos $\mathcal{H}_i$, para $i = 1, 2, ...$ tal que:

- si n_i es el tamaño de la estructura $(\mathcal{H}_i, \lambda(\mathcal{H}_i))$,
- para $cada\ X \in \mathcal{H}_i$,
- $\lambda(\mathcal{H}_i \backslash \{X\})$ es de tamaño $O(n_i^{\log \log n_i})$, es decir superpolinomial en n_i

Se concluye que el algoritmo de Berge es superpolinomial en el peor caso, independientemente del orden que se ocupe para elegir las hiperaristas.

(notar que se trata de una superpolinomialidad "menos superpolinomial" que la del algoritmo de Fredman y Khachiyan)