Minicurso de hipergrafos

Pablo Sáez

10.10.2008

1. Definiciones básicas

Definición. Un *grafo (no-dirigido)* es un par $G := (V, E)$, con $V \neq \emptyset$ un conjunto de *vértices* y $E \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V), |x| = 2\}$ un conjunto de *aristas*, con $\mathcal{P}(V)$ el conjunto potencia de V .

Definición. Un *hipergrafo* se define como un grafo generalizado $\mathcal{H} := (A, E)$, con $A := V$ finito y $E \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V)\}$ un conjunto de *hiperaristas*; o simplemente como una familia de conjuntos $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Para toda hiperarista $X := \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in \mathcal{H}$, $X \subseteq A$.

El concepto fue propuesto por Claude Berge en 1970 [1].

Definición. La clase de problemas P (*deterministic-polynomial*) es el conjunto de problemas computables que pueden resolverse en tiempo polinomial (es decir, que pueden ser acotados superiormente mediante un polinomio) por una máquina determinista. La clase de problemas NP (*non-deterministic polynomial*) son aquellos que pueden resolverse en tiempo polinomial por una *máquina no determinista*. La clase de los problemas NP -completos es la conformada por todos los problemas NP que además son NP -hard o NP -difíciles, es decir, tal que cualquier otro problema NP se puede *reducir polinomialmente* (transformar en tiempo polinomial) en él. Note que $P \subseteq NP$ y NP -Completo $\subseteq NP$. La *Conjetura de Cook* (ampliamente aceptada) afirma que $P \neq NP$.

En teoría de hipergrafos se definen muchos problemas NP -completos análogos a la teoría de grafos, como el problema de coloración de hipergrafos, el problema de cobertura, el problema de la clique, etc. Pero el problema que nos interesa, se aleja de la teoría de grafos, y está más relacionada con otras áreas como la lógica, la combinatoria o la teoría de juegos.

Este es el *problema de dualidad de hipergrafos*, un problema que en [2] se descubrió podía ser resuelto sub-exponencialmente (es decir, acotado superiormente por una función sub-exponencial pero super-polinomial), lo que implica que no pertenece a los NP -completos, pero que sin embargo aún no se sabe si pertenece a la clase P , o al menos a NP . Para definir este problema, primero es mejor definir algunos operadores matemáticos clásicos de esta teoría:

Definición. Dado $\mathcal{H}$ definido sobre un A :

- $\mu(\mathcal{H}) := \{X \in \mathcal{H}; \forall Y \in \mathcal{H}, Y \not\subseteq X\}$ es el conjunto *minimal, irredundante, o de Sperner* de $\mathcal{H}$.
 $\mathcal{H}$ es *minimal* si $\mathcal{H} = \mu(\mathcal{H})$.
- $\nu(\mathcal{H}) := \{Z \subseteq A; \exists X \in \mathcal{H}, X \subseteq Z\}$ es el *clutter* de $\mathcal{H}$.
- $\tau(\mathcal{H}) := \{Z \subseteq A; \forall X \in \mathcal{H}, X \cap Z \neq \emptyset\}$ es el conjunto de las *transversales o blocker* de $\mathcal{H}$.
- $\lambda(\mathcal{H}) := \mu(\tau(\mathcal{H}))$ es el conjunto de las *transversales minimales* de $\mathcal{H}$.

El problema de dualidad de hipergrafos, entonces, es el siguiente: dados $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ hipergrafos minimales, ¿ $\mathcal{K} := \lambda(\mathcal{H})$?

Este problema tiene aplicaciones directas en lógica, teoría de juegos, indexación de bases de datos, diagnóstico basado en modelos, optimización, inteligencia artificial, machine learning, entre muchas otras. Es fácil ver que este problema es equivalente, por ejemplo, al de *dualidad de fórmulas normales conjuntivas monótonas* (con literales no negativos) de la lógica proposicional.

Ejemplo 1.1. Las fórmulas booleanas $\phi = p_1 \vee (p_2 \wedge p_3) = (p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$ y $\psi = p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)$ son duales, porque intercambiando los $\vee$ y $\wedge$ de una fórmula, se obtiene la otra. Estas fórmulas vistas como hipergrafos serían, respectivamente, $\mathcal{H} := \{\{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}\}$ y $\mathcal{K} := \{\{p_1\}, \{p_2, p_3\}\}$, porque $\lambda(\mathcal{H}) = \mu(\tau(\mathcal{H})) = \mu(\{\{p_1\}, \{p_1, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, p_3\}\}) = \{\{p_1\}, \{p_2, p_3\}\} = \mathcal{K}$.

Note que μ puede determinarse en tiempo polinomial, en tanto que sea $|A| := n$, $|\tau(\mathcal{H})|$ crece exponencialmente en función de n . Es decir, μ es un operador polinomial, mientras que τ no puede determinarse sino en tiempo exponencial. Sin embargo, en [2] se ideó un algoritmo que permite calcular λ en tiempo sub-exponencial. Y es lo que veremos en la próxima sesión.

Referencias

- [1] C. Berge *Graphes et Hypergraphes*. Dunod. 1970.
- [2] M.L. Fredman, L. Khachiyan *On the Complexity of Dualization of Monotone Disjunctive Normal Forms*. Journal of Algorithms. Volume 21. 1996.