# Problemas P y NP-completos asociados a conjuntos recubridores de ciclos en digrafos con signos

Marco A. S. Montalva Medel

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción

Junio - 2008

# Introducción

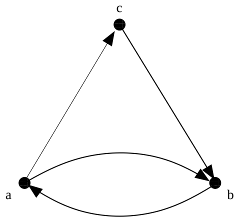
- El problema de determinar un conjunto de vértices de cardinalidad mínima que recubra los ciclos positivos de un digrafo fue definido por (Aracena, J.; 2001) y denominado *PFVS* (*Positive Feedback Vertex Set*).

- *PFVS* nace del acotamiento del número de puntos fijos que tiene una red discreta.

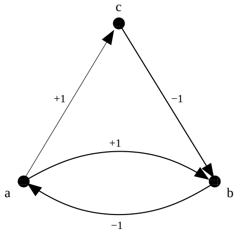
- Los puntos fijos de una una red de regulación génica están relacionados con los fenotipos observados en ella (movilidad, diferenciación, proliferación, cambio de forma, adaptación metabólica, etc.)

# Definiciones y notaciones

- Un *grafo dirigido o digrafo* es un par $(V, E)$ y $E \subseteq V \times V$.
- Un digrafo con función de peso $w : E \longrightarrow \{-1, 1\}$ se llama *digrafo con signos* y se denota por $\langle G, w \rangle$.

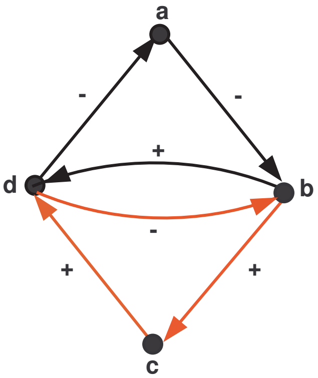


(a) Digrafo



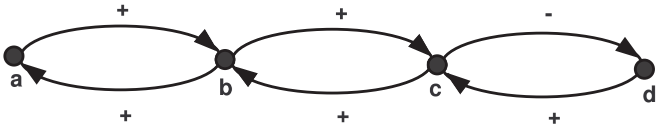
(b) Digrafo con signos

- Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos. Un ciclo (dirigido) $C$ se dice *positivo* si la cantidad de arcos negativos en $C$ es par, en otro caso, se llama *negativo*.
- Para $v \in G$, $d_{in}(v) = |A_{in}(v)|$, donde $A_{in}(v) = \{(w, v) \in E : w \in V - v\}$
- $d_{out}(v) = |A_{out}(v)|$ se define de manera similar.



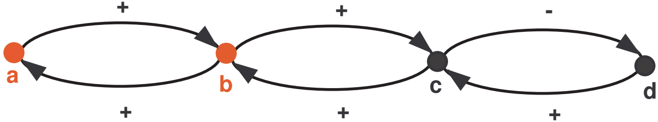
Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos:

- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).



Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos:

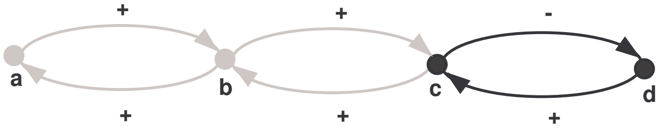
- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $U^+ = \{a, b\}$ es un positive feedback vertex set.

Sea $\langle G = (V, E), w\rangle$ un digrafo con signos:

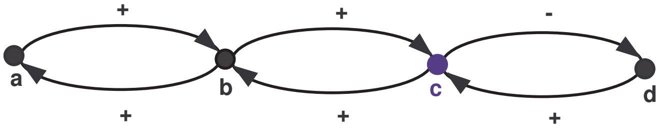
- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $U^{+} = \{a, b\}$ es un positive feedback vertex set.

Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos:

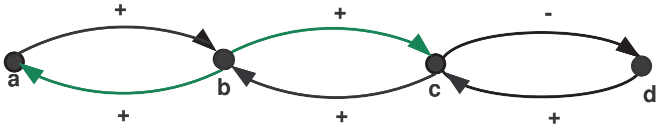
- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $U^- = \{c\}$ es un negative feedback vertex set.

Sea $\langle G = (V, E), w\rangle$ un digrafo con signos:

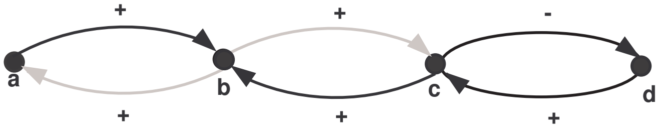
- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $A^+ = \{(b, a), (b, c)\}$ es un positive feedback arc set.

Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos:

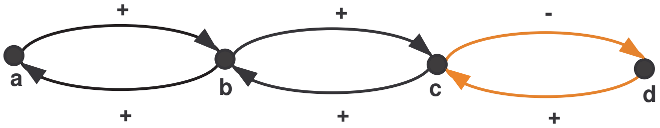
- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $A^+ = \{(b, a), (b, c)\}$ es un positive feedback arc set.

Sea $\langle G = (V, E), w \rangle$ un digrafo con signos:

- $U \subseteq V$ es un *positive (negative) feedback vertex set* si $G - U$ no tiene ciclos positivos (negativos).
- $A \subseteq E$ es un *positive (negative) feedback arc set* si $G - A$ no tiene ciclos positivos (negativos).




- $A^- = \{(c, d), (d, a)\}$ es un negative feedback arc set.

# Complejidad

- Dados $A$ y $B$ dos problemas de decisión, se dice que $A$ *se reduce polinomialmente* a $B$ si existe $f : I_A \longrightarrow I_B$ polinomial tal que: $A(w) = T \iff B(f(w)) = T$. Notación: $A \leq_p B$.
- Cuando $A \leq_p B$ y $B \leq_p A$, la notación será: $A \iff_p B$.

- Un problema de decisión $A$ se dice *NP-Hard* si $\forall B \in NP$, $B \leq_p A$.
- $A$ es *NP-Completo* si es $NP$ y *NP-Hard*.
- Sean $B$ y $C$ dos problemas de decisión, si $B$ es *NP-Completo* y $B \leq_p C$, entonces $C$ es *NP-Hard*.

# Feedback Vertex Set

**Problema FVS**
**Instancia:** *Un digrafo* $G = (V, E)$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
**Pregunta:** *Existe un feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?*.

- FVS es clásico en Teoría de Grafos.

# Variantes de FVS

## Positive and Negative Feedback Vertex Set

**Problema PFVS**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
**Pregunta:** *Existe un positive feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?.*

**Problema NFVS**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
**Pregunta:** *Existe un negative feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?.*

# Feedback Arc Set

**Problema FAS**
**Instancia:** *Un digrafo* $G = (V, E)$ *y* $k \in \boldsymbol{N}$.
**Pregunta:** *Existe un feedback arc set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?.*

# Variantes de FAS

## Positive and Negative Feedback Arc Set

**Problema PFAS**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
**Pregunta:** *Existe un positive feedback arc set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?.*

**Problema NFAS**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $k \in \mathbb{N}$.
**Pregunta:** *Existe un negative feedback arc set* $U$ *tal que* $|U| \leq k$*?.*

# Generalización de FVS

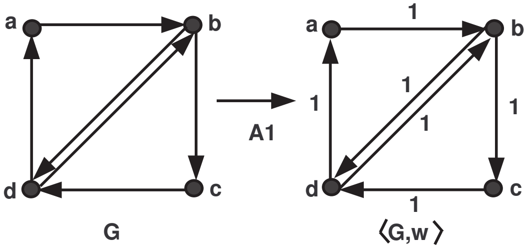
**Problema PFVS-k**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $t \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall v \in V$, $d_{in}(v) \leq k$.
**Pregunta:** *Existe un positive feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

**Problema NFVS-k**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$ *y* $t \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall v \in V$, $d_{in}(v) \leq k$.
**Pregunta:** *Existe un negative feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

**Teorema 1(*):** $FVS \leq_p PFVS$.

**Demostración.**

$$(G, k) \longmapsto \mathbf{A1}((G, k)) = (\langle G, w \rangle, k)$$




∎

**Teorema (Karp, 1972):** *FVS es NP-completo.*

**Corolario 1(*):** *PFVS es NP-hard.*

Para probar la NP-completitud de PFVS, definimos:

**Problema POSITIVE CYCLE**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $\langle G, w \rangle$.
**Pregunta:** *Existe un ciclo positivo en* $G$*?.*

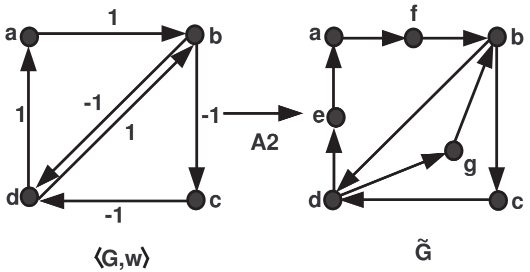
Este problema lo relacionamos con uno mas conocido:

**Problema EVEN CYCLE**
**Instancia:** *Un digrafo* $G$.
**Pregunta:** *Existe un ciclo de largo par en* $G$*?.*

**Teorema 2(*):** *POSITIVE CYCLE* $\Longleftrightarrow_p$ *EVEN CYCLE.*

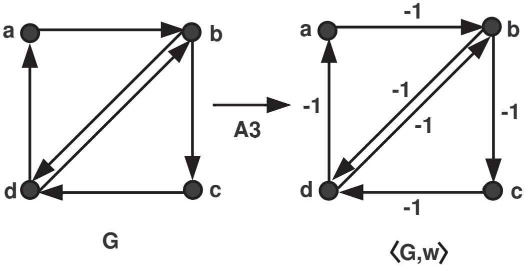
**Demostración.** *POSITIVE CYCLE* $\leq_p$ *EVEN CYCLE.*

$$\langle G, w\rangle \longmapsto \mathbf{A2}(\langle G, w\rangle) = \tilde{G}$$



*EVEN CYCLE* $\leq_p$ *POSITIVE CYCLE.*

$$G \longmapsto \mathbf{A3}(G) = \langle G, w \rangle$$




■

**Teorema (Vazirani-Yannakakis, 1989; Robertson et al., 1999):** *EVEN CYCLE es P.*

**Corolario 2(*):** *POSITIVE CYCLE es P.*

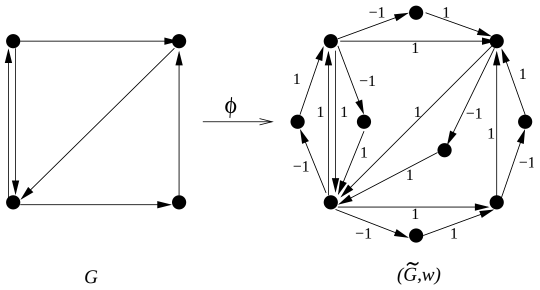
Más aún NEGATIVE CYCLE es P.

**Teorema Ppal.(*):** *PFVS es NP-completo.*

**Teorema 3(*):** *NFVS es NP-completo.*

**Demostración.** *FVS* $\leq_p$ *NFVS*.

$$G \longmapsto \phi(G) = \langle \tilde{G}, w \rangle$$

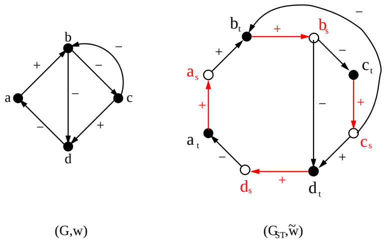



■

**Teorema 4:** *PFAS y NFAS son NP-completos.*

**Demostración.**

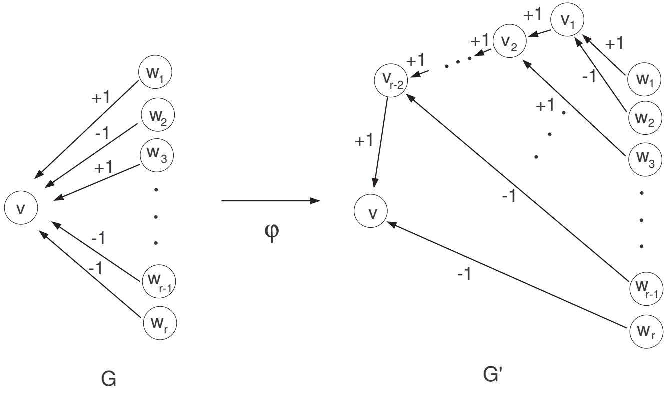
$$(G, w) \longmapsto \theta(G, w) = (G_{ST}, \tilde{w})$$




- PFVS $\leq_p$ PFAS y NFVS $\leq_p$ NFAS. ∎
- Aracena, J., A. Gajardo, M. Montalva, *On the complexity of feedback set problems in signed digraphs*, ENDM **30** (2008), 249-254.

**Teorema 5:** *PFVS-k y NFVS-k son NP-completos para todo* $k \geq 2$.

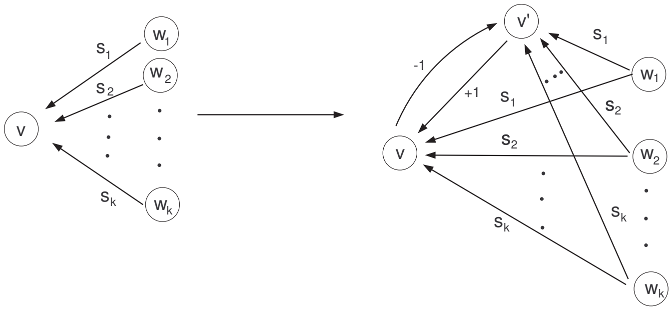
**Demostración.**




■

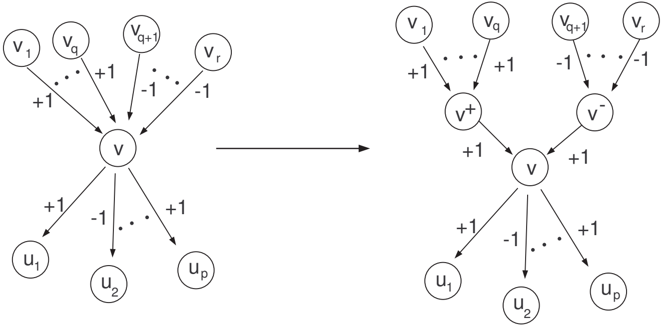
# Digrafos de interés biológico

- En redes de Kauffman, PFVS y NFVS son NP-Completos.



# Digrafos de interés biológico

- En REBN localmente monótonas, PFVS y NFVS son NP-Completos.



# Diferencias entre FVS v/s PFVS y NFVS

- También hay casos donde FVS es más simple que PFVS y NFVS.

Definiciones: Dado un digrafo $G = (V, E)$;

- El nodo $z$ es *candado* si existe un camino dirigido en $G$ desde $z$ a algún nodo $y$ que pertenece a un ciclo.
- $A(G, x)$ es el *grafo asociado al nodo $x$ con respecto a $G$* y consiste de $x$ y todos los nodos de $G$ que no son candados si $x$ es removido de $G$. Los arcos de $A(G, x)$ son todos los arcos de $G$ cuyos extremos son nodos de $A(G, x)$.
- Una *secuencia-D* de $G$ es una secuencia de nodos $y_1,\ldots,y_k$ tal que cada uno de los grafos $A(G_{i-1}, y_i)$ es cíclico, donde $G_0 = G$ y $G_i = G_{i-1} - A(G_{i-1}, y_i)$ para $1 \leq i \leq k$. Cuando $G_k$ es acíclico, se llama secuencia-D *completa*.
- $G$ es *cíclicamente reducible* ssi existe una secuencia-D completa para $G$.

- C-C. Wang et al. en 1985 probaron que FVS es P sobre digrafos cíclicamente reducibles.
- Definiemdo los siguientes problemas de decisión:

**PFVS-CR**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$, $t \in \mathbb{N}$ *y tal que* $G$ *es cíclicamente reducible.*
**Pregunta:** *Existe un positive feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

**NFVS-CR**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$, $t \in \mathbb{N}$ *y tal que* $G$ *es cíclicamente reducible.*
**Pregunta:** *Existe un negative feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

**Teorema 6:** *PFVS-CR y NFVS-CR son NP-completos.*

**Demostración.** PFVS (NFVS) $\leq_p$ PFVS-CR (NFVS-CR). Basta agregar sobre cada nodo un ciclo negativo (positivo) de largo 2 con un nuevo nodo. ∎

# Diferencias entre PFVS y NFVS

- Hay casos donde NFVS es mas simple que PFVS:

**Problema PFVS-Nk**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$, $t \in \mathbb{N}$ *y tal que* $G$ *has* $k$ *negative arcs.*
**Pregunta:** *Existe un positive feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

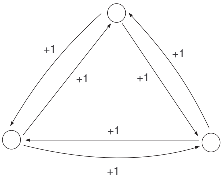
**NFVS-Nk Problem**
**Instancia:** *Un digrafo con signos* $(G = (V, E), w)$, $t \in \mathbb{N}$ *y tal que* $G$ *tiene a lo mas* $k$ *arcos negativos.*
**Pregunta:** *Existe un negative feedback vertex set* $U$ *tal que* $|U| \leq t$*?.*

Entonces, PFVS-Nk es NP-completo y NFVS-Nk es P.

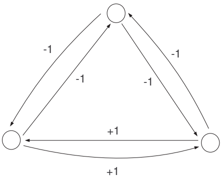
# Diferencias entre PFVS y NFVS

- También hay casos donde PFVS es más simple que NFVS.
- J. Aracena, A. Gajardo, M. Montalva, *Positive and negative feedback vertex set problems*. Enviado a DAM.
- Por ejemplo en digrafos completos, NFVS es NP-Completo y PFVS es P.

Para NFVS, consideremos los siguientes digrafos completos:



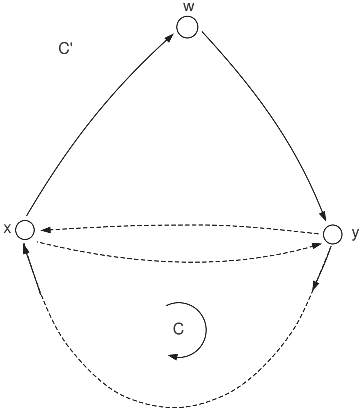

(c) $K_3^1$



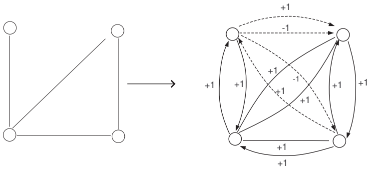

(d) $K_3^2$

**Lema 1:** $(K_n, w)$, $n \geq 3$ *tiene un ciclo negativo* $\Leftrightarrow$ $K_n$ *tiene un subdigrafo completo de tres vértices* $K_3$ *tal que* $K_3 \neq K_3^1$ *y* $K_3 \neq K_3^2$.

**Demostración.** $\Leftarrow$) Directa.
$\Rightarrow$) Por contrarrecíproco + inducción sobre largo de un ciclo.



Luego MAX-CLIQUE $\leq_p$ MAX-CLIQUE de $K_3^1$ o $K_3^2$ sobre digrafos completos.




Por lo tanto, NFVS sobre digrafos completos es NP-Completo. ■

- Aracena, J., "Modelos matemáticos discretos asociados a los sistemas biológicos. Aplicación a las redes de regulación génica," Ph.D. thesis, University of Chile & UJF, Santiago, Chile, & Grenoble, France, 2001.
- Aracena, J., *On the number of fixed points in regulatory boolean networks*, Bulletin of Mathematical Biology, accepted.
- Aracena, J., A. Gajardo, M. Montalva, *On the complexity of feedback set problems in signed digraphs*, ENDM 30 (2008), 249-254.
- Demongeot, J., Kaufmann, M., Thomas, R., *Positive regulatory circuits and memory*, C. R. Acad. Sci. 323 (2000), 69-80.

- Montalva, M., “Conjunto de vértices recubridor de los ciclos positivos en un digrafo”, Engineering thesis, University of Concepción, Concepción, Chile, 2006.
- LLoyd, E. L., M. L. Soffa, and C.-C. Wang, *Feedback vertex sets and cyclically reducible graphs*, Journal of the ACM **32** (1985), 296–313.
- Robertson, N., P. Seymour, and R. Thomas, *Permanents, pfaffian orientations, and even directed circuits*, Annals of Mathematics **150** (1999), 929–975.
- Vazirani, V., and M. Yannakakis, *Pfaffian orientations, 0-1 permanents, and even cycles in directed graphs*, Discrete Applied Mathematics **25** (1989), 179–190.

Thanks!