Retículo de Subconjuntos Irredundantes

Andreas Polyméris

27.11.2008

1. Anillo

Definición. Un *anillo de conjuntos* —[1], capítulo XIV.7— es una familia Γ de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{P}$ dado, tal que $\forall H, K \in \Gamma$, $H \cap K, H \cup K \in \Gamma$.

Sea, en todo lo que sigue, $\mathbb{S} := \{0, 1\}$ y $(\mathcal{P}, \leq)$ un conjunto finito y ordenado.
Dada una expresión —o el objeto matemático que define—, entenderemos que *dualizarla —lo—* significa reemplazar todo $s \in \mathbb{S}$ de la expresión por su *contrario* $\neg s \in \mathbb{S}$; así como reemplazar $\leq$ por $\geq$.

Definición. Dado $H \subseteq \mathcal{P}$:
$\nu^0(H) := \{w \in \mathcal{P}; \exists x \in H, x \leq w\}$ es el subconjunto de los *inferiormente respondidos* por H;
$\nu^1(H) := \{w \in \mathcal{P}; \exists x \in H, x \geq w\}$ es el subconjunto los *superiormente respondidos* por H.
$\Gamma^0 := \{H \subseteq \mathcal{P}; H = \nu^0(H)\}$ es la familia de los *cerrados hacia arriba*;
$\Gamma^1 := \{H \subseteq \mathcal{P}; H = \nu^1(H)\}$ es la familia de los *cerrados hacia abajo*.
Estos dos operadores, así como las dos familias que resultan, son duales, unas de las otras.
Estas familias son anillos
—porque si $H, K \in \Gamma^0$: si $w \in \mathcal{P}$ es tal que $\exists x \in H \cap K$ con $x \leq w$, entonces evidentemente $w \in H \cap K$; y si $w \in \mathcal{P}$ es tal que $\exists x \in H \cup K$ con $x \leq w$, entonces evidentemente $w \in H \cup K$—
y por lo tanto [1], ordenados por la inclusión $\subseteq$, son retículos distributivos;
y totales; puesto que el ínfimo, tanto de Γ^0 como de Γ^1, es $\emptyset$; y el supremo de los dos retículos es $\mathcal{P}$.

2. Transversales

Definición. Dado $H \subseteq \mathcal{P}$:
$\tau^0(H) := \{w \in \mathcal{P}; \forall x \in H, x \not\leq w\}$ es la familia de las *transversales inferiores* de H;
$\tau^1(H) := \{w \in \mathcal{P}; \forall x \in H, x \not\geq w\}$ es la familia de las *transversales superiores* de H.
Note que estas definiciones reemplazan a —pero difieren de— las usualmente propuestas para *casos booleanos*, en que $\mathcal{P}$ es un retículo booleano; como, por ejemplo, el considerado en [2].

Está claro que los pares $(\nu^s(H), \tau^s(H))$ son particiones de $\mathcal{P}$. Pero además, de la *forma holista* que tienen los operadores τ^s, se concluye que son *antítonos* —$\forall J \subseteq \mathcal{P}$, si $H \subseteq J$, entonces $\tau^s(H) \supseteq \tau^s(J)$—; y que las composiciones $\tau^{\neg s} \circ \tau^s$ son *extensivas* —$(\tau^{\neg s} \circ \tau^s)(H) \supseteq H$—; y por lo tanto el par (τ^0, τ^1) es una *conexión de Galois*; lo que implica $\tau^s \circ \tau^{\neg s} \circ \tau^s = \tau^s$. Esto nos lleva al *Lema Fundamental* de la problemática que aquí nos ocupa:

Lema 1. Vale $\nu^s = \tau^{\neg s} \circ \tau^s$;
por lo tanto los ν^s son *operadores de clausura* —es decir, son extensivos, monótonos e *idempotentes*; a saber, $\nu^s \circ \nu^s = \nu^s$—;
y $\{\tau^s(H); H \subseteq \mathcal{P}\} = \Gamma^{\neg s}$.

Demostración. Si $z \in \mathcal{P}$, entonces $z \in (\tau^1 \circ \tau^0)(H)$ ssi $\forall y \in \tau^0(H)$, $z \not\leq y$; es decir, ssi $\forall y \in \mathcal{P}$ con $z \leq y$, $\exists x \in H$ con $x \leq y$; es decir, ssi $z \in \nu^0(H)$. $\square$

Los operadores restringidos $\tau^s : \Gamma^s \to \Gamma^{\neg s}$ son antimorfismos entre los dos retículos —ya que las funciones τ^s son antítonas—;
por lo tanto también valen las siguientes *Leyes de De Morgan*:
Si $H, K \in \Gamma^s$ entonces $\tau^s(H \cap K) = \tau^s(H) \cup \tau^s(K)$ y $\tau^s(H \cup K) = \tau^s(H) \cap \tau^s(K)$.
Además $\tau^1 \circ \tau^0 = \iota = \tau^0 \circ \tau^1$; donde ι es la función de identidad en el conjunto potencia de $\mathcal{P}$.

3. Irredundantes

Definición. Dado $H \subseteq \mathcal{P}$:
$\mu^0(H) := \{w \in H; \forall x \in H, x \not< w\}$ es la familia de los *minimales* de H;
$\mu^1(H) := \{w \in H; \forall x \in H, w \not< x\}$ es la familia de los *maximales* de H.
H es *irredundante*, si $\forall x, w \in H$, $x \not< w$; es decir,
si $\mu^0(H) = H$; o equivalentemente, si $\mu^1(H) = H$.
Por lo tanto la *irredundancia* es un concepto autodual.
Sea Γ la familia de los *subconjuntos irredundantes*.
Note que para todo $s \in \mathbb{S}$, $\nu^s \circ \mu^s = \nu^s$ y $\mu^s \circ \nu^s = \mu^s$; por lo tanto, las funciones restringidas $\nu^s : \Gamma \to \Gamma^s$ y $\mu^s : \Gamma^s \to \Gamma$ son mutuamente inversas.

Lo último permite definir un par dual de retículos distributivos y totales sobre Γ:

Definición. Dados $s \in \mathbb{S}$, $H, K \in \Gamma$ entendemos que $H \sqsubseteq^s K$, si $H \subseteq \nu^s(K)$.
Puesto que esto último es equivalente a $\nu^s(H) \subseteq \nu^s(K)$, está claro que $\sqsubseteq^s$ es una relación de orden sobre Γ.
Por lo tanto los correspondientes operadores *supremo e ínfimo* son $H \sqcup^s K := \mu^s(H \cup K)$ y $H \sqcap^s K := \mu^s(\nu^s(H) \cap \nu^s(K))$.

Claro que Γ también está ordenado por la inclusión —normal; que no genera retículo—; y por eso es interesante ver que esta *inclusión* es la *conjución de los dos retículos* recién definidos; ya que $\forall H, K \in \Gamma$, $H \subseteq K$, ssi $H \sqsubseteq^0 K$ y $H \sqsubseteq^1 K$ —puesto que $\forall x \in H$ $\exists w, z \in K$ con $w \leq x \leq z$; lo que implica $w = x = z$; es decir, $x \in K$.

Definición. Con $\lambda^s := \mu^{\neg s} \circ \tau^s$ vale $\mu^s = \lambda^{\neg s} \circ \tau^s$;
por lo tanto las restricciones $\lambda^s : \Gamma \to \Gamma$ son antimorfismos entre los dos retículos definidos sobre Γ —si $H \sqsubseteq^s K$, entonces $\lambda^s(K) \sqsubseteq^{\neg s} \lambda^s(H)$—;
por eso también valen las siguientes *Leyes de De Morgan*: $\forall H, K \in \Gamma$,
$\lambda^s(H \sqcap^s K) = \lambda^s(H) \sqcup^{\neg s} \lambda^s(K)$ y $\lambda^s(H \sqcup^s K) = \lambda^s(H) \sqcap^{\neg s} \lambda^s(K)$.
Además $\lambda^1 \circ \lambda^0 = \iota = \lambda^0 \circ \lambda^1$; donde ι es la función de identidad en Γ.

4. Consecutivos

Definición. Dado el par $(H,K) \in \Gamma\times\Gamma$ entendemos que es un *par de s-consecutivos* si $H \sqsubseteq^s K$ y $\forall J \in \Gamma$ con $H \sqsubseteq^s J \sqsubseteq^s K$, vale $J \in \{H,K\}$; lo que denotamos por $H -^s K$.
Esto será el caso, ssi $\exists x \in K$ tal que $H = \mu^s(\nu^s(K)\backslash\{x\})$ —porque $\nu^s(K)\backslash\{x\} \in \Gamma^s$.
Por lo tanto, dado $K \in \Gamma$, $|\{H \in \Gamma; H -^s K\}| = |K|$.

Debido a ello, dado $k \in \mathbb{N}$, vale $k = |\nu^s(K)|$, ssi existen $H_0, H_1, \ldots, H_k \in \Gamma$, tal que $\emptyset = H_0 -^s H_1 -^s \cdots -^s H_k = K$.
Por eso la *altura* —cardinalidad de cadena más larga— de cualquiera de los dos retículos de Γ es $|\mathcal{P}|$.

5. Irreducibles

Definición. Un $J \in \Gamma$ es *s-irreducible*, si $J \neq \emptyset$ y $\forall H, K \in \Gamma$ con $J = H \sqcup^s K$, vale $J \in \{H,K\}$.
Está claro que esto es el caso ssi $|J| = 1$; es decir, si $\exists x \in \mathcal{P}$ tal que $J = \{x\}$

Esto confirma un resultado general: en [1] —*Theorem 15*— se demuestra que para todo retículo distributivo de altura $k \in \mathbb{N}$, el conjunto ordenado de sus elementos irreducibles tiene k elementos; y que por lo tanto el retículo es isomorfo al anillo de subconjuntos de irreducibles que son cerrados hacia abajo.

6. Niveles

Definición. Sea, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq |\mathcal{P}|$, $\Gamma_k := \{K \in \Gamma; |\nu^0(K)| = k\}$ el *nivel-k* de Γ.

Lema 2. Dado el par $(H,K) \in \Gamma \times \Gamma$, vale $H -^0 K$, ssi $\exists z \in \lambda^0(H)$ tal que $K = \mu^0(H \cup \{z\})$.
Por lo tanto, dado $H \in \Gamma$, $|\{K \in \Gamma; H -^0 K\}| = |\lambda^0(H)|$.

Demostración. Porque entonces $\forall w \in \nu^0(K)\backslash\nu^0(H)$ vale $w = z$ $\square$

7. ¿Polinomialidad?

Note que si suponemos que, dados $w, z \in \mathcal{P}$, la cuestión ¿$w \leq z$? es polinomialmente decidible, entonces, dado $s \in \mathbb{S}$ y $H \in \Gamma$, las cuestiones ¿$w \in \nu^s(H)$?, ¿$w \in \tau^s(H)$? y ¿$w \in \mu^s(H)$? son evidentemente polinomialmente decidibles. Pero no veo razón por la cual también lo sería la cuestión ¿$w \in \lambda^s(H)$?; que sin embargo es polinomialmente decidible en el *caso booleano* arriba mencionado.

Lo que pasa es que en el caso booleano no sólo se puede, como en el caso general, listar polinomialmente $\mu^s(H) = (\mu^s \circ \nu^s)(H)$, sino además $(\mu^s \circ \bar{\nu}^s)(H)$; donde
$\bar{\nu}^0(H) := \{w \in \mathcal{P}; \exists x \in H, x < w\}$ y
$\bar{\nu}^1(H) := \{w \in \mathcal{P}; \exists x \in H, x > w\}$
son las *versiones estrictas* de los operadores ν^s.
Note que los $\bar{\nu}^s$ son operadores monótonos e idempotentes, pero típicamente no-extensivos.

Note que para eso es necesario y suficiente que: $\forall x \in \mathcal{P}$ se puedan listar polinomialmente tanto el subconjunto $(\mu^0 \circ \bar{\nu}^0)(\{x\})$ de los *sucesores* como el subconjunto $(\mu^1 \circ \bar{\nu}^1)(\{x\})$ de los *antecesores* de x.

Pero para poder responder polinomialmente a ¿$w \in \lambda^s(H)$? —sin *generar* nuevos elementos de $\mathcal{P}$— también bastaría poder responder polinomialmente —no sólo a ¿$w \in \nu^s(H)$?, sino también— a ¿$w \in \rho^s(H)$?; donde $\rho^s := \bar{\tau}^{\neg s} \circ \tau^s$ y $\bar{\tau}^s := \mathcal{P} \backslash \bar{\nu}^s$.

Esto es así, porque $\mu^s = \iota \cap \bar{\tau}^s$, debido a lo cual $\lambda^s = (\iota \cap \bar{\tau}^{\neg s}) \circ \tau^s = \tau^s \cap \rho^s$.
Note que ρ^s es un operador monótono y extensivo, pero típicamente no-idempotente.
Y que en cambio los $\bar{\rho}^s := \bar{\tau}^{\neg s} \circ \bar{\tau}^s$ vuelven a ser operadores de clausura.

8. Dualidad de Niveles

El *Problema de Dualidad* es: dados $H, J \in \Gamma$, ¿$\lambda^0(H) = J$?
Por lo dicho arriba parece difícil que este sea polinomial; incluso si suponemos en lo que sigue que sucesores y antecesores pueden ser listados polinomialmente.

Pero podríamos considerar el siguiente *Problema de Dualidad de Niveles*: Dado un nivel-k, explícitamente, como familia $\Delta \subseteq \Gamma$, y una familia $\Lambda \subseteq \Gamma$, ¿$\Lambda = \{\lambda^0(H); H \in \Delta\}$?

Me parece que este problema puede estar en *P*; porque se dará esta dualidad, ssi Λ se puede *reagrupar* para explicitar el nivel-k+1; condición que se puede chequear polinomialmente; donde $\Delta' \subseteq \Gamma$ es un *reagrupamiento* de Λ, si $\forall z \in \mathcal{P}$, $|\{K \in \Delta'; z \in K\}| = |\{J \in \Lambda; z \in J\}|$.

Podemos partir chequeando, polinomialmnete, que $\forall J \in \Lambda$, $\exists! H \in \Delta$ con $J \subseteq \lambda^0(H)$. Si esto no fuera el caso, la respuesta al problema es NO; por lo tanto podemos suponer que el chequeo resultó positivo.

Ahora, si a pesar de eso la respuesta es NO, entonces se puede certificar polinomialmente, haciendo ver que para un par (J, H) con $J \subseteq \lambda^0(H)$, $\exists z \in \lambda^0(H) \backslash J$. Por lo tanto nuestro problema está en *co-NP*.

Y si la respuesta es SÍ, entonces esto también se puede certificar polinomialmente, exhibiendo un reordenamiento Δ' de J, tal que aplicando, sobre Δ', la *relajación* que lleva de un nivel al siguiente más bajo, se obtenga Δ. Así que nuestro problema también está en *NP*.

Referencias

[1] MacLane, S. y G. Birkhoff: *Algebra*. MacMillan, 1967.

[2] Polyméris, Andreas y Pablo Sáez: *Saturación de Hipergrafos*. En *XVII Jornada de Matemática de la Zona Sur, Valdivia, Chile*, 2008.