Dinámica de autómtas y lenguajes formales

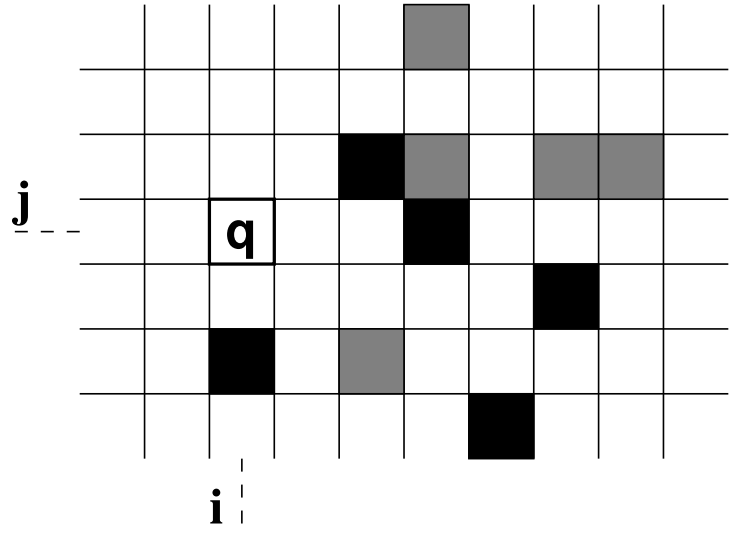
Anahí Gajardo

Departamento de Ingeniería Matemática,

Universidad de Concepción

e-mail : anahi@ing-mat.udec.cl

Autómatas de una cabeza



Posición: (i,j)

Coloración: c:Z^{k}→S

Estado: q

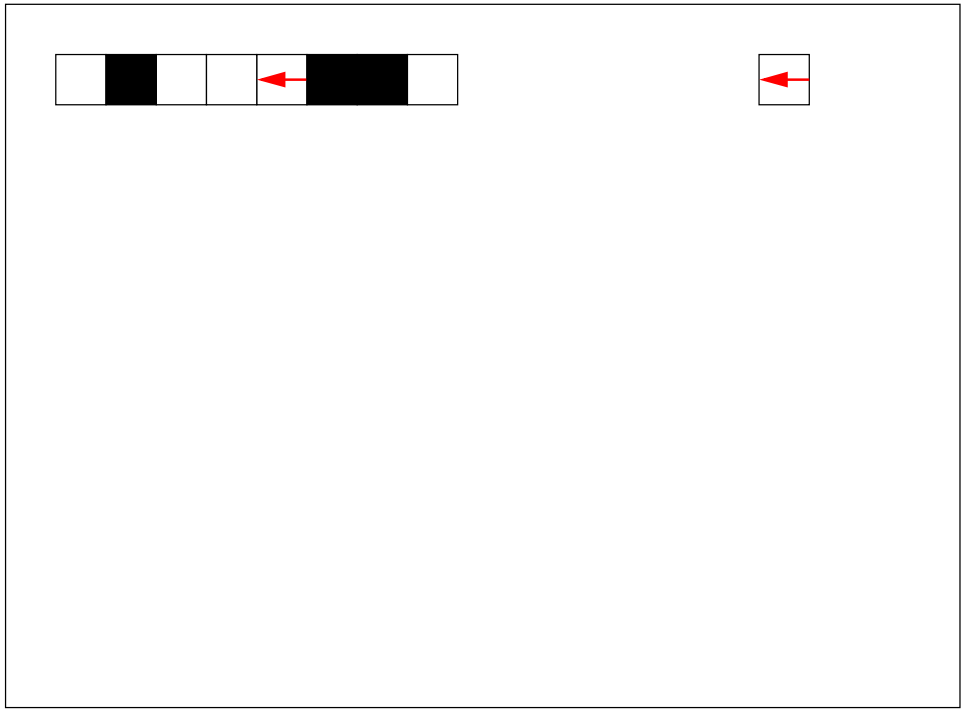
La dinámica está definida por la regla de transición δ :

$$\delta(color, estado) = (\overline{color}, \overline{estado}, direc)$$

Applet...

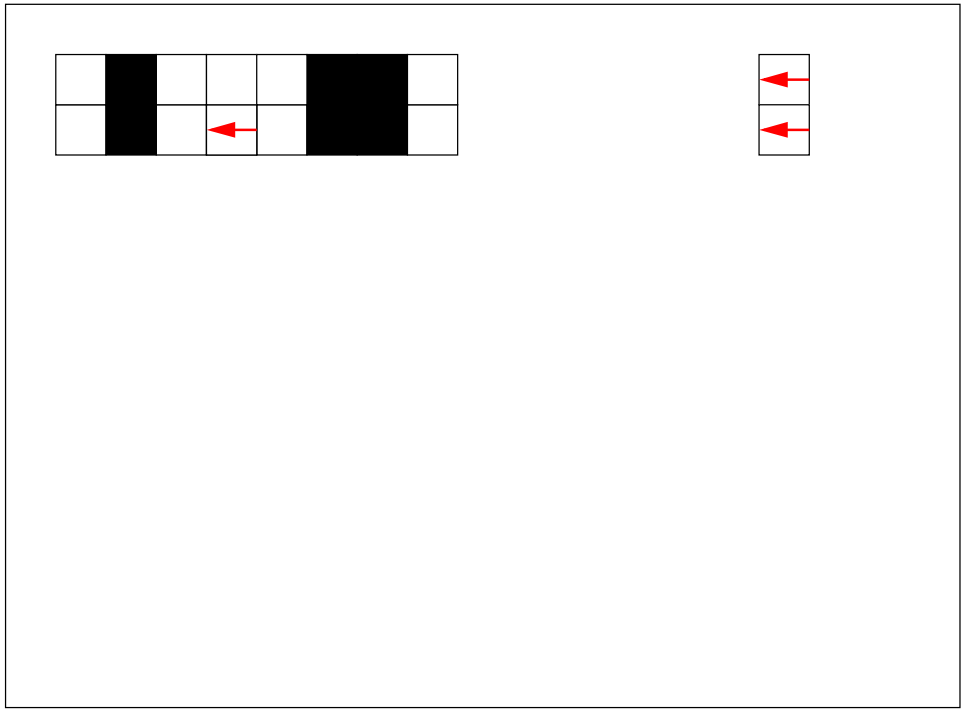
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



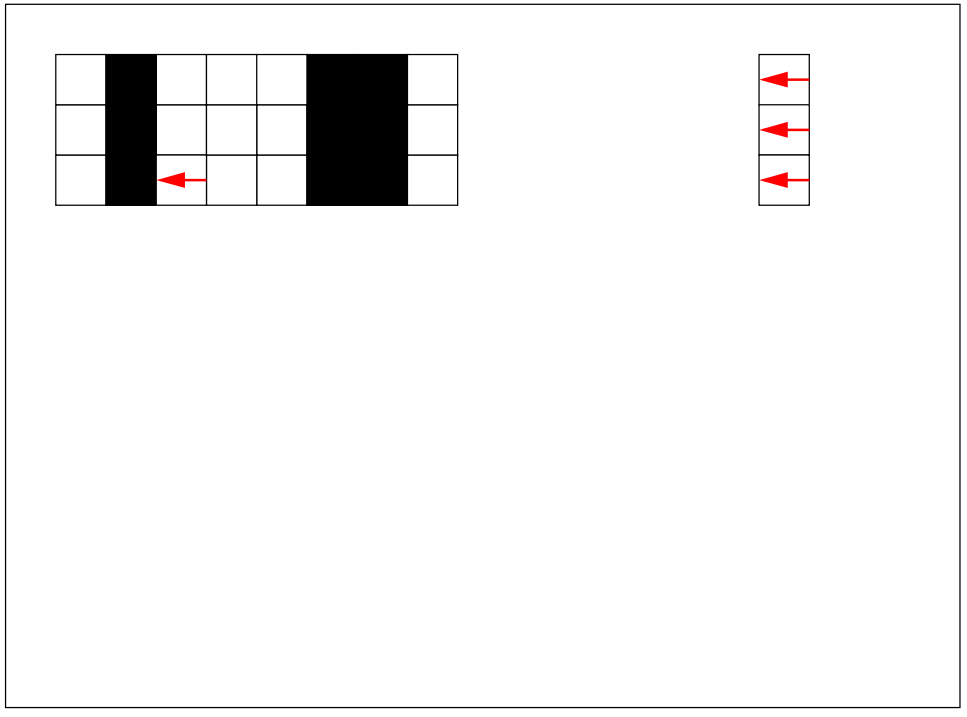
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



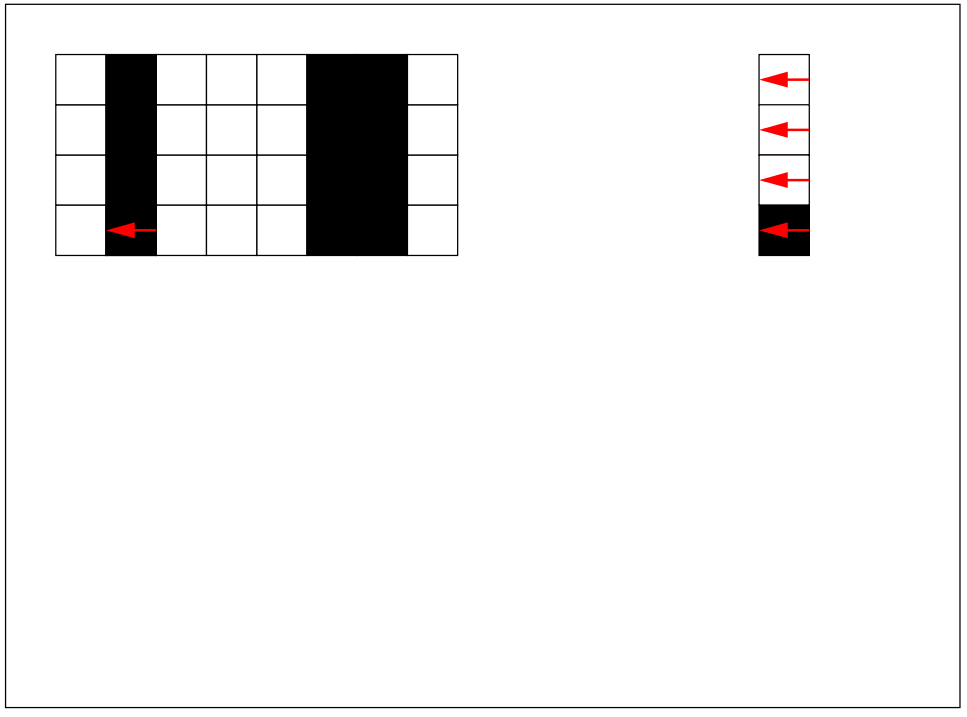
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



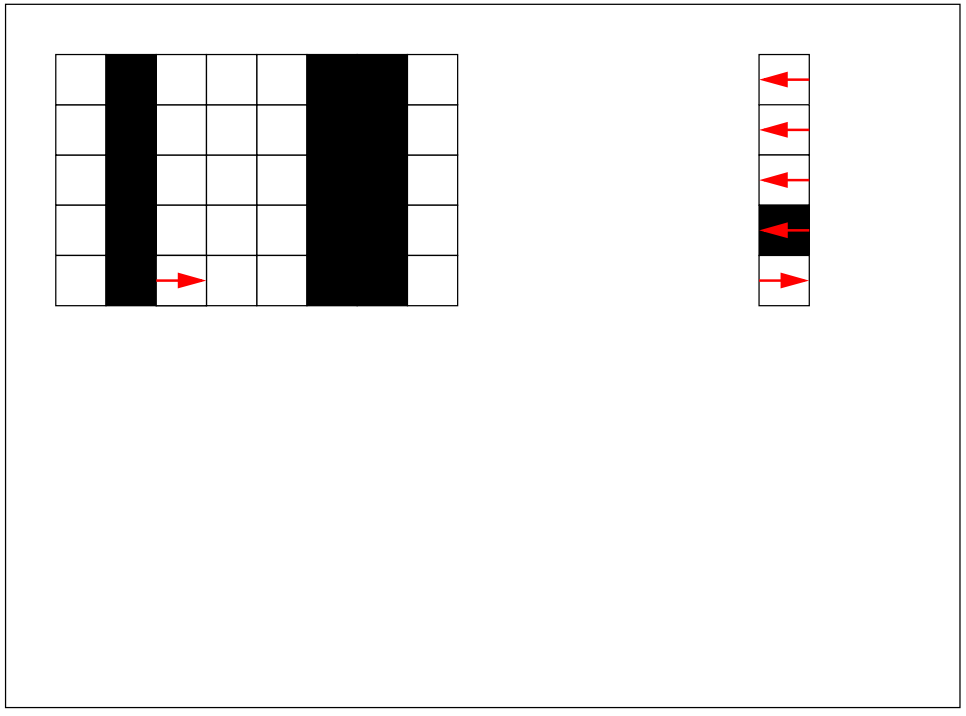
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



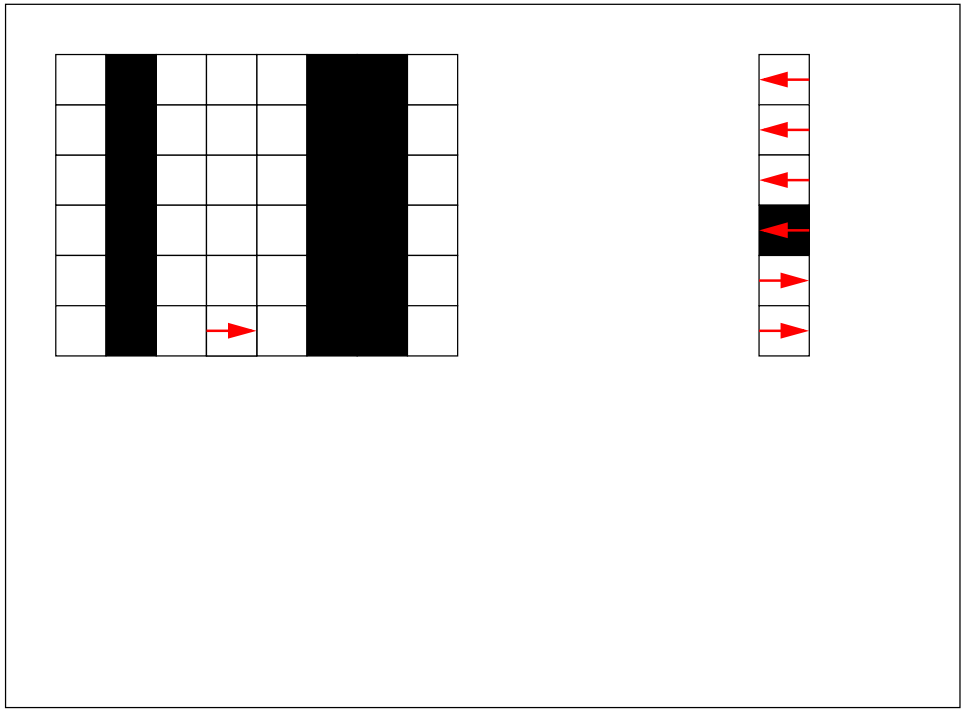
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



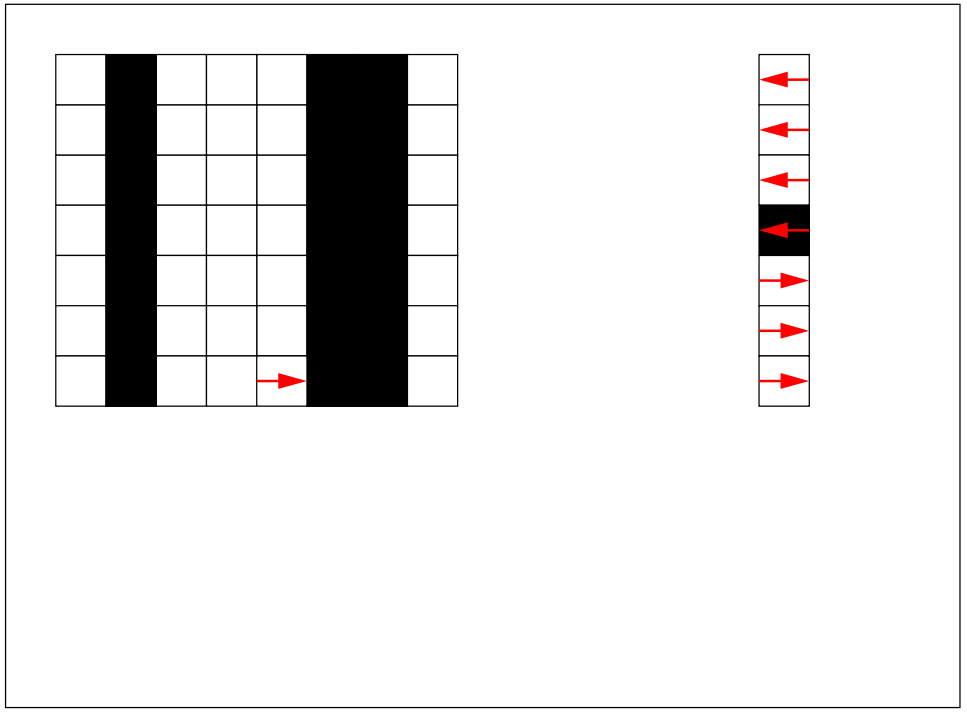
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



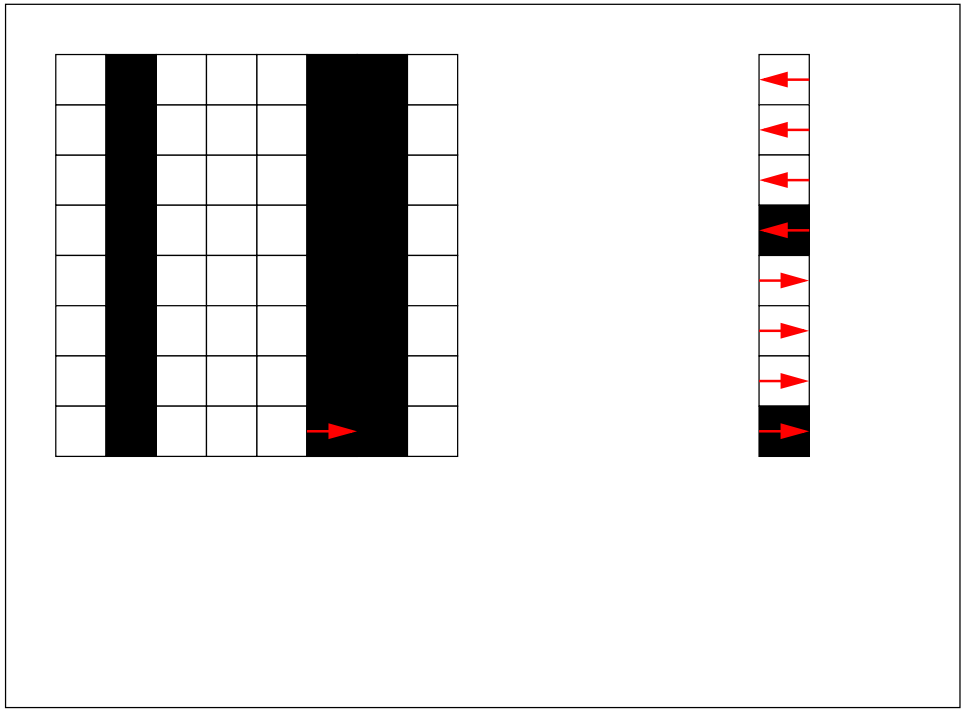
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



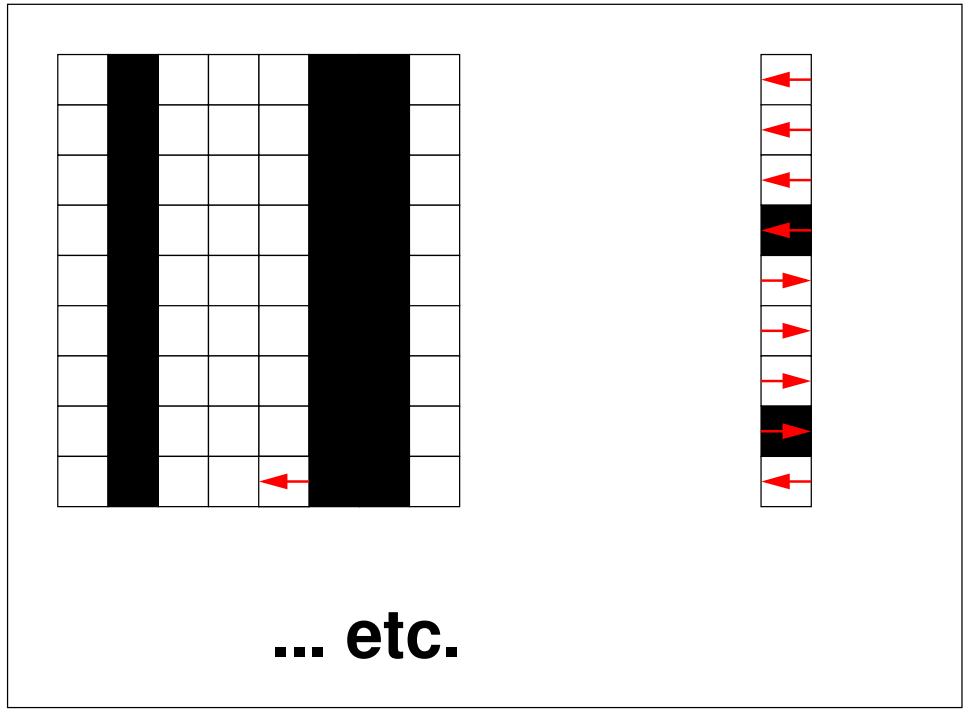
Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



Asociamos un shift

Idea : registrar la cadena de colores y estados que la máquina lee y tiene, respectivamente.



Asociamos un shift

Si variamos las condiciones iniciales (colores y estado) obtenemos una secuencia distinta

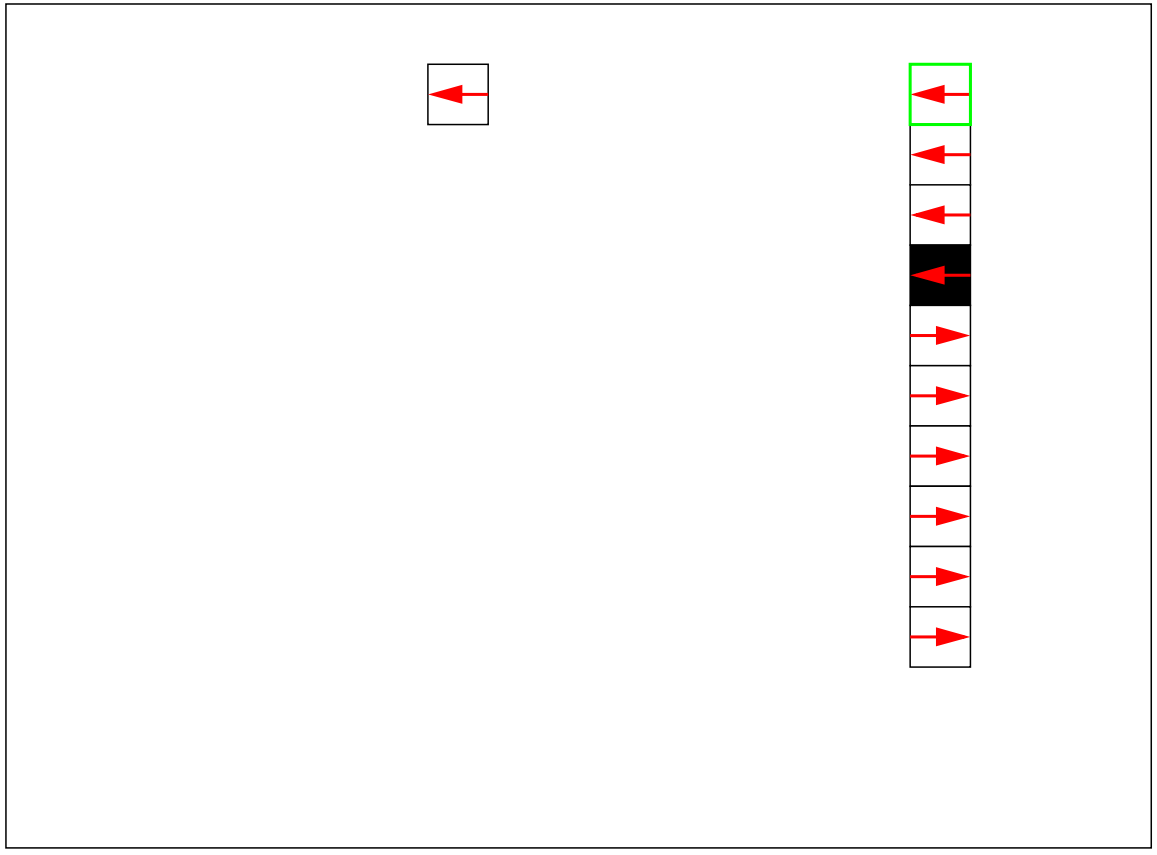
$$(\textit{coloración}, \textit{estado}) \longrightarrow \textit{secuencia infinita}$$
$$\textit{conjunto de condiciones iniciales} \longrightarrow \textit{subshift} = S_T$$

La que rebota permanentemente entre dos células negras tiene un subshift cuyos elementos son repecitiones de patrones del tipo :

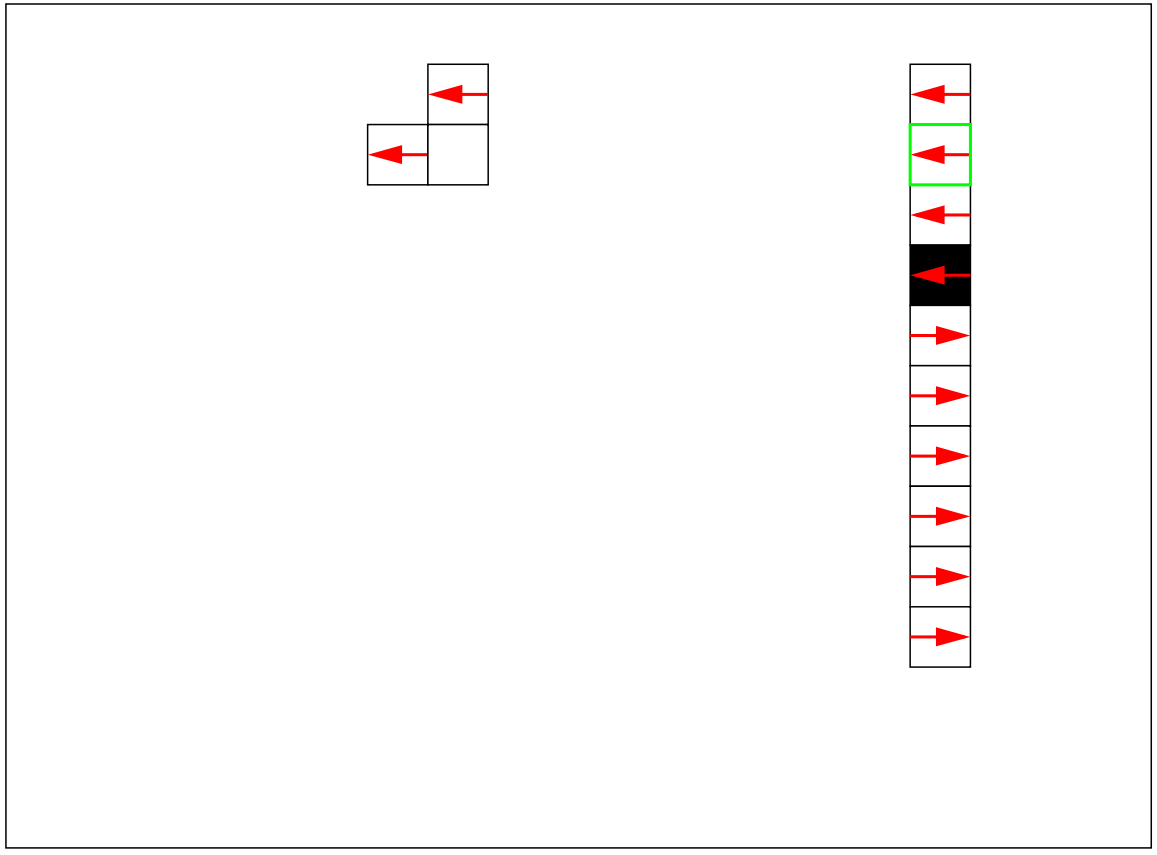
$$\binom{\square}{\leftarrow} \cdots (n \text{ veces }) \cdots \binom{\square}{\leftarrow}\binom{\blacksquare}{\leftarrow}\binom{\square}{\rightarrow} \cdots (n \text{ veces }) \cdots \binom{\square}{\rightarrow}\binom{\blacksquare}{\rightarrow}$$

Observamos que, si conocemos la regla de transición, es posible deducir la trayectoria del autómata junto con el color inicial de las células que visita a partir de una secuencia de S_T.

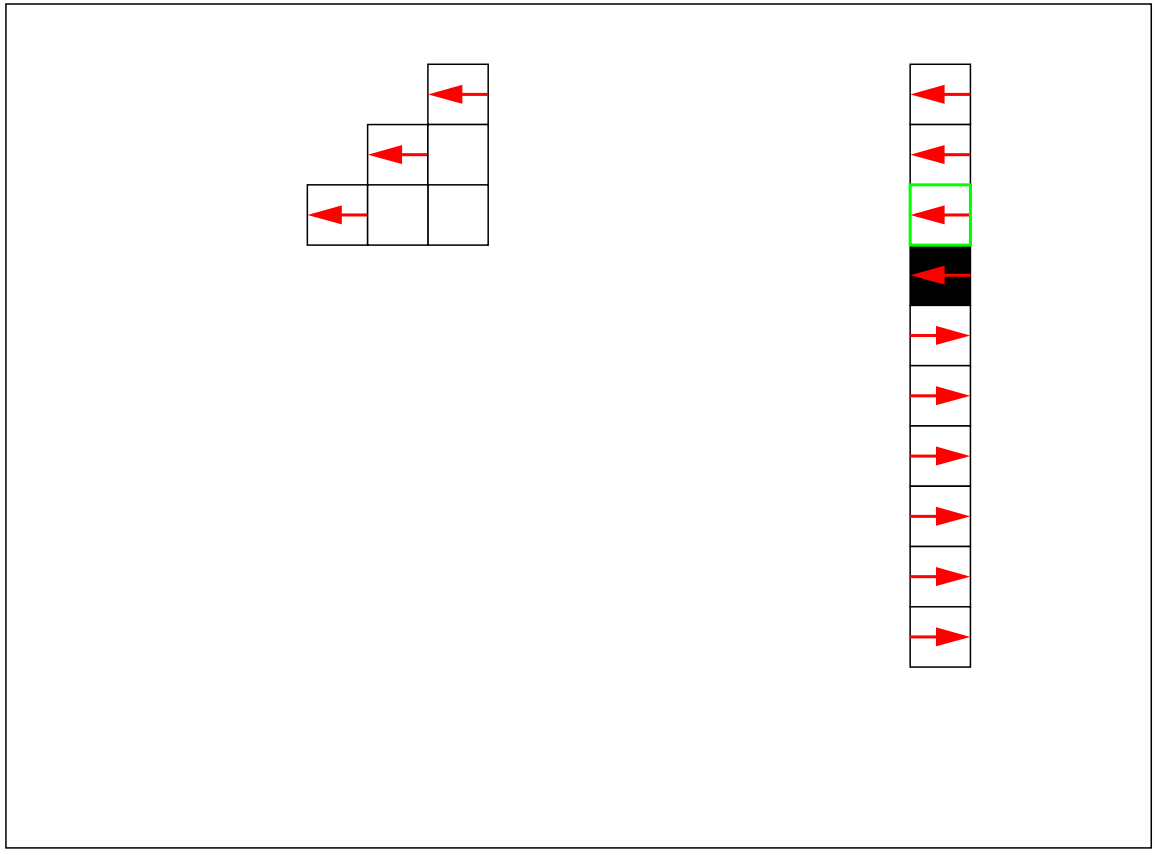
Ej. : Hormiga que Rebota



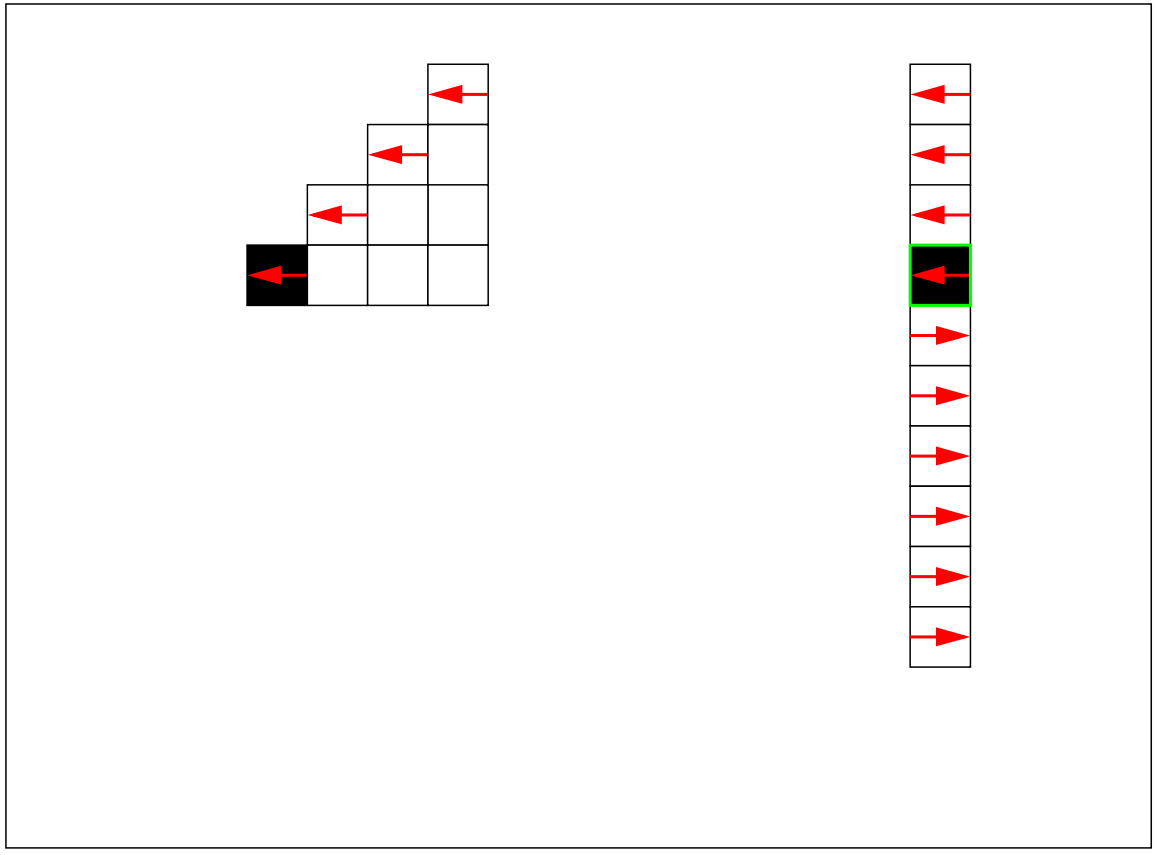
Ej. : Hormiga que Rebota



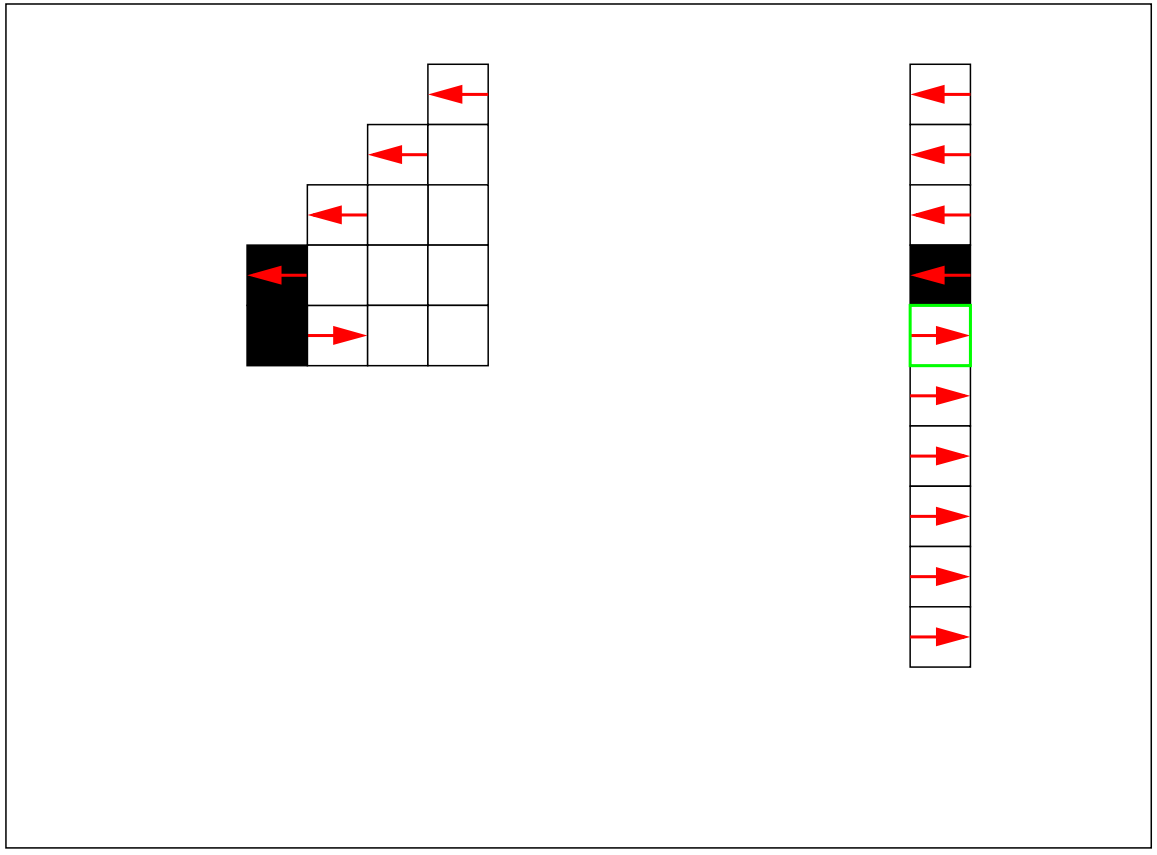
Ej. : Hormiga que Rebota



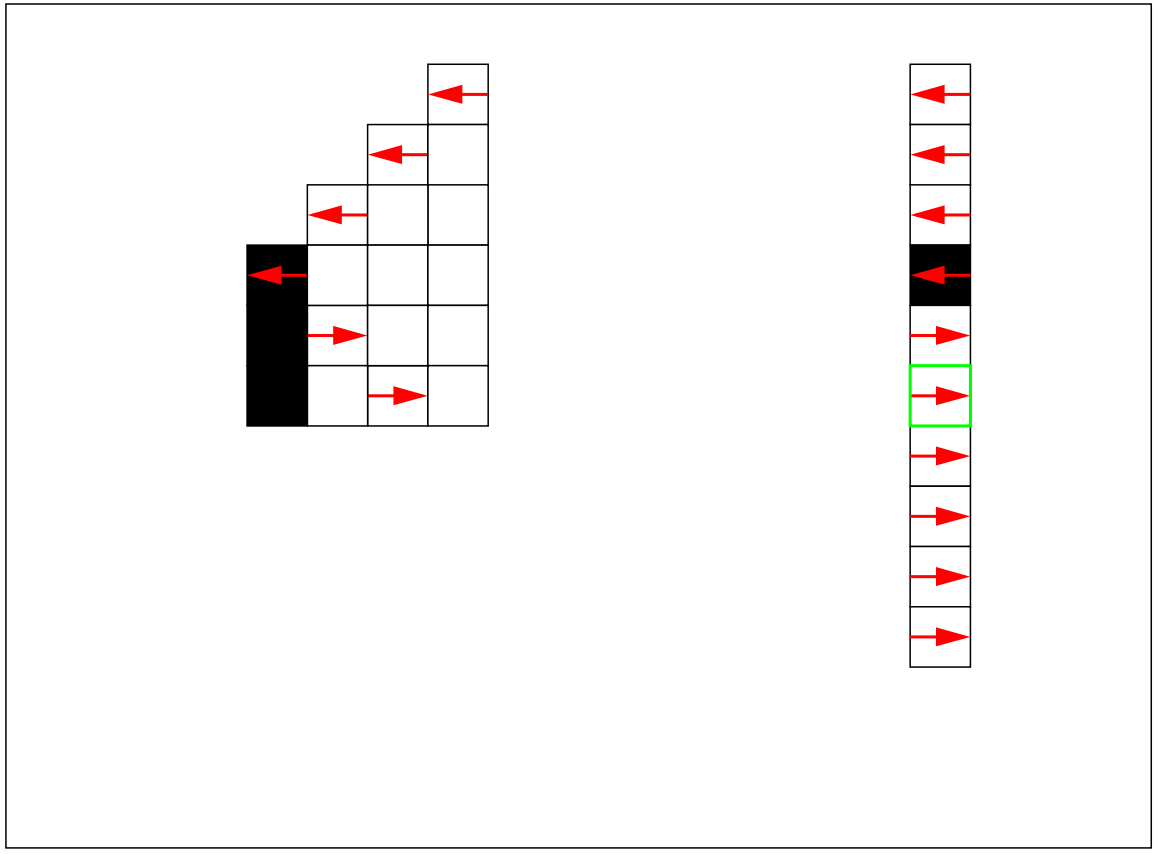
Ej. : Hormiga que Rebota



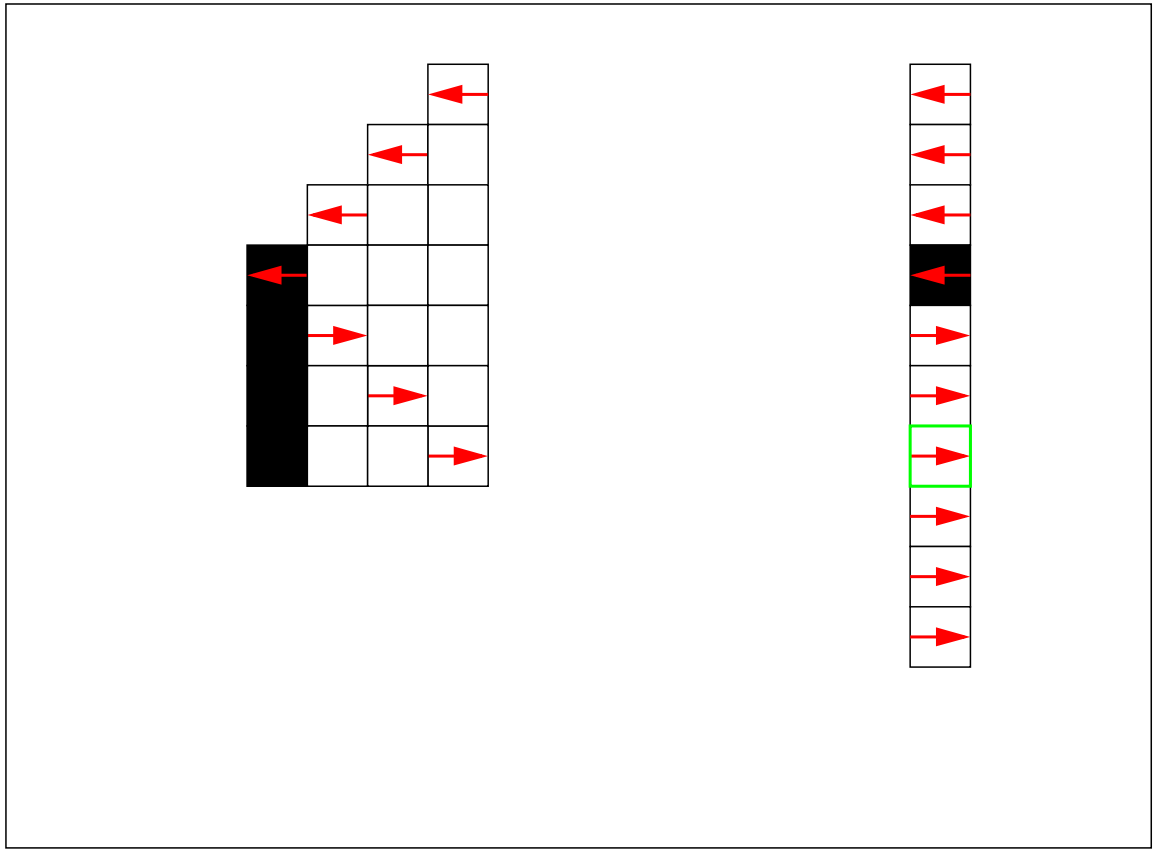
Ej. : Hormiga que Rebota



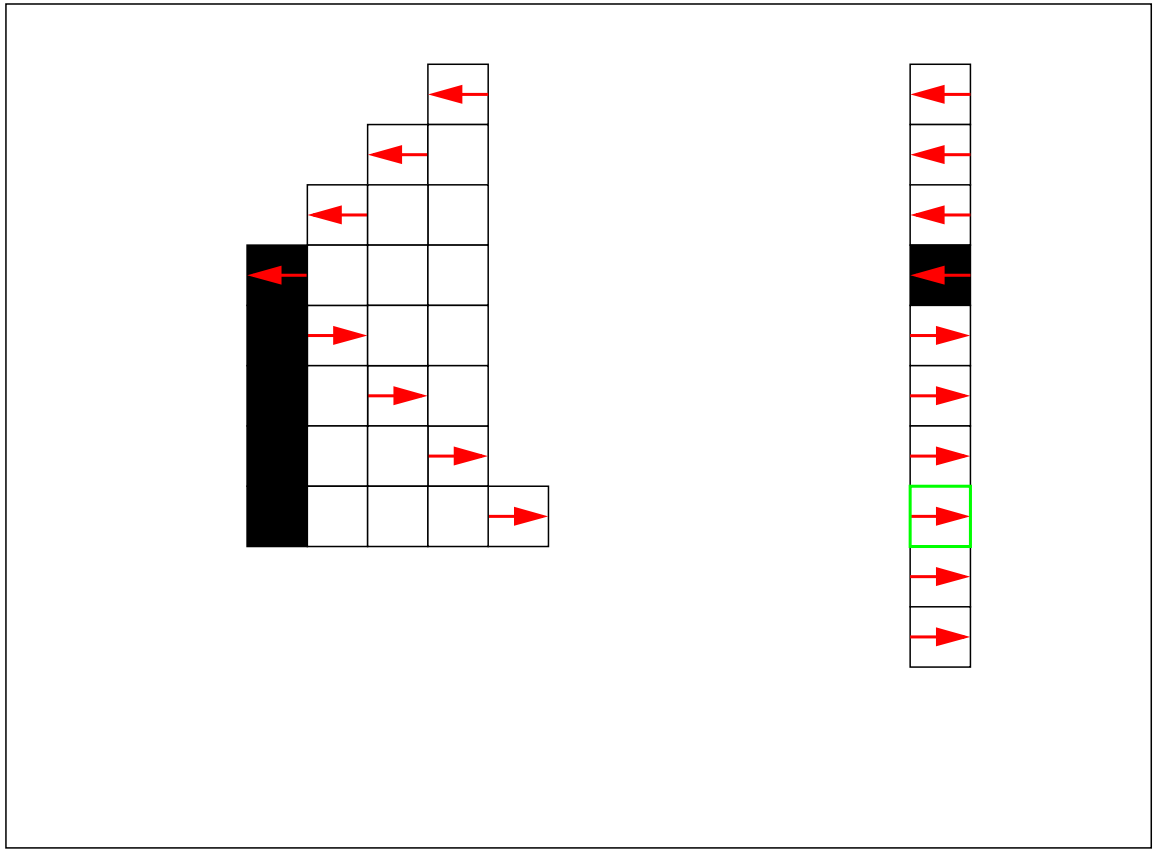
Ej. : Hormiga que Rebota



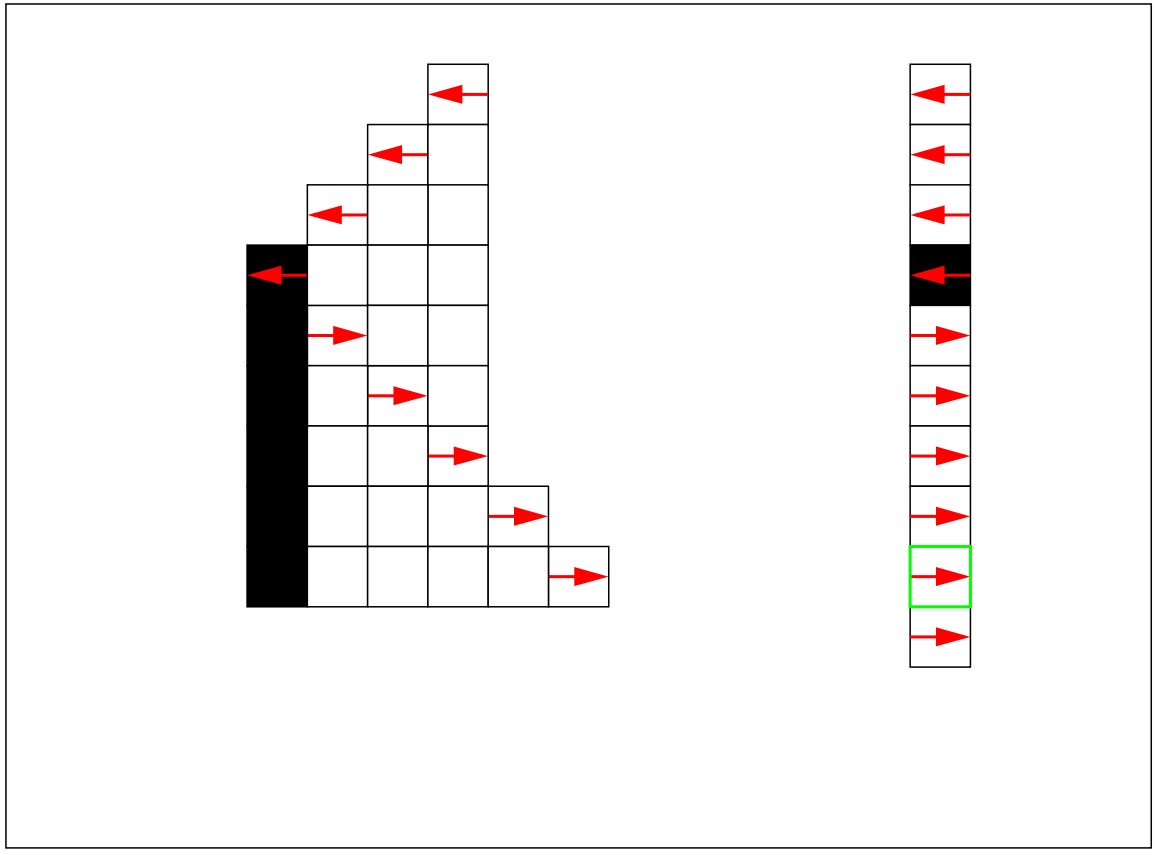
Ej. : Hormiga que Rebota



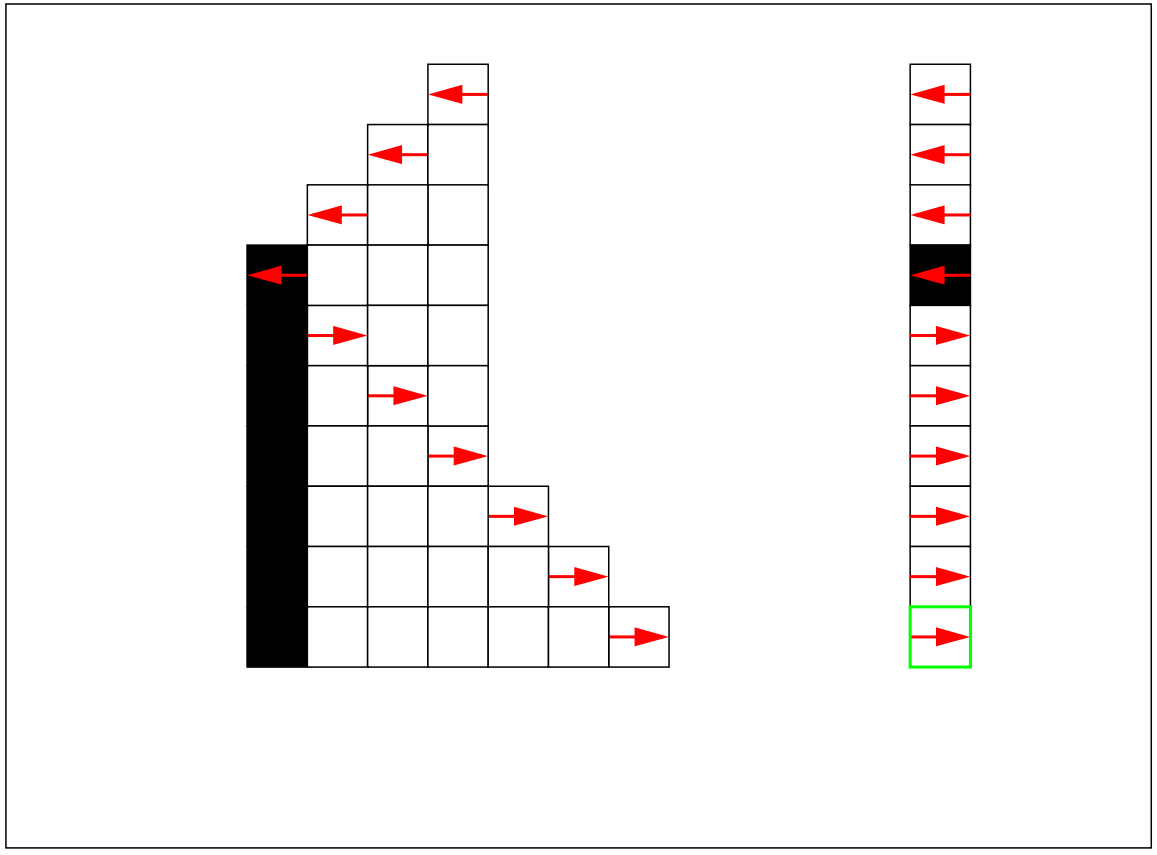
Ej. : Hormiga que Rebota



Ej. : Hormiga que Rebota



Ej. : Hormiga que Rebota



Teorema -1. En dimensión 1 el shift de toda hormiga se puede reconocer mediante un autómata con dos pilas.

Teorema -1. *En dimensión 1 el shift S_T de toda hormiga se puede reconocer mediante un autómata con dos pilas.*

Teorema 0*. *En dimensión n existen hormigas cuyo shift S_T no puede ser reconocido por ningún autómata de k pilas, para nungún k.*

*A. G., J. Mazoyer, Theor. Comput. Sci., 2007.

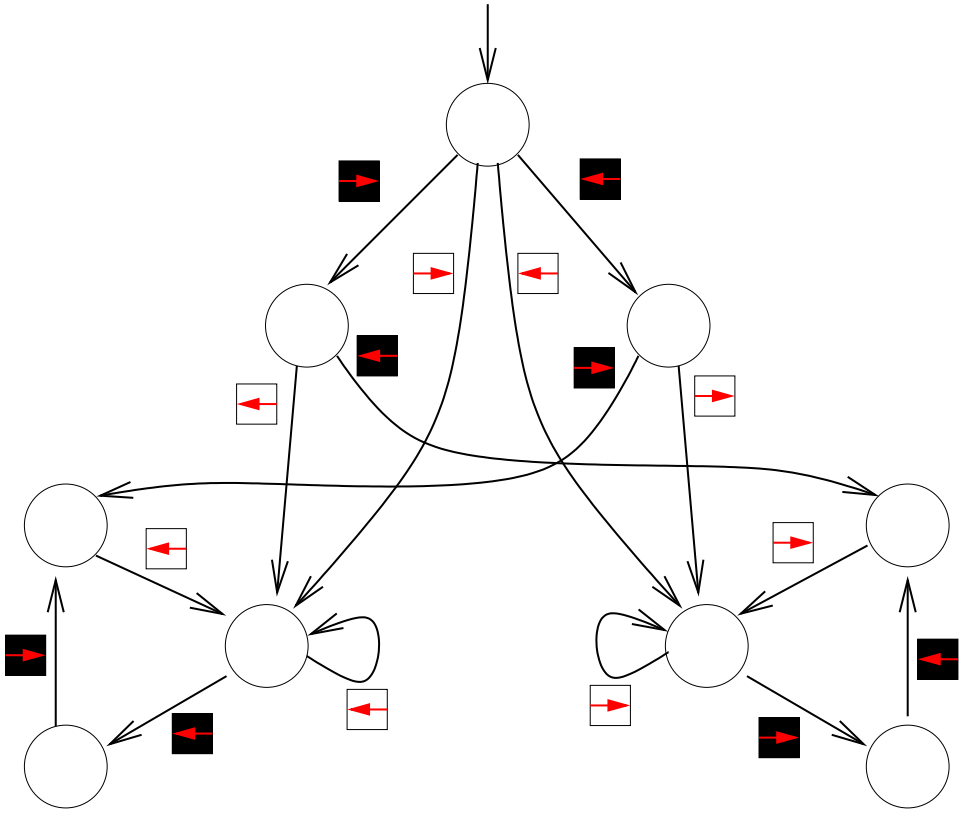
Teorema -1. *En dimensión 1 el shift S_T de toda hormiga se puede reconocer mediante un autómata con dos pilas.*

Teorema 0*. *En dimensión n existen hormigas cuyo shift S_T no puede ser reconocido por ningún autómata de k pilas, para nungún k.*

Pero algunas de las hormigas que hemos visto tienen un shift que se puede reconocer con un Autómata Finito Determinista.

*A. G., J. Mazoyer, Theor. Comput. Sci., 2007.

El de la hormiga testaruda :



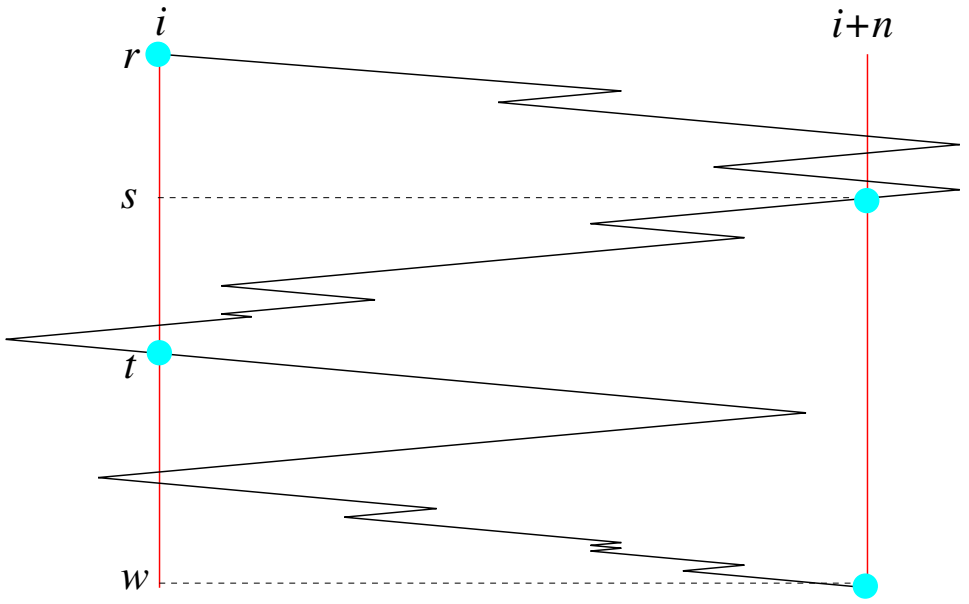
Teorema 1[*]. *En dimensión d, si S_T es reconocido por un autómata finito, entonces existe un natural N tal que*

1. *el tiempo entre dos visitas consecutivas a una misma célula está acotado por N,*
2. *en una trayectoria periódica, el número de células visitadas es menor que N^d,*
3. *en una trayectoria no acotada el número de visitas totales a cada célula es menor que $|C|^{N^d}|Q|$, y*
4. *si la coloración inicial es periódica (exceptuando tal vez un número finito de células), entonces el autómata tendrá un comportamiento últimamente regular o periódico.*

[*]A.G, J. Mazoyer, Theor. Comput. Sci., ,2007 ; A.G., Journées Automates Cellulaires, 2008.

Corolario. *La Hormiga que Rebota no tiene un shift regular ya que puede hacer ciclos del largo que quiera.*

Definición. Decimos que un autómata hace un zigzag de ancho n a la derecha si en una trayectoria existen cuatro instantes $r < s < t < w$ tales que la posición del autómata en los instantes r y t es i y en los instantes s y w es $i + n$.



Teorema 2.* *Dado un autómata T en $\mathbb{Z}$ cuyo shift S_T es reconocido por un autómata de pila determinista en tiempo real, entonces existe un natural N tal que*

1. *todo zigzag tiene ancho acotado por N, y*
2. *si ya ha hecho un ciclo de ancho mayor que N, entonces su trayectoria futura será acotada o bien cada célula será vistada a lo más $N|Q \times \Sigma^N|$.*

... además 1 es suficiente para que le shift sea reconocible por un Autómata con una Pila.

*A. G., Preprint DIM 2009-4.

La Hormiga que Rebota hace zigzags del ancho que se quiera, por lo tanto su shift tampoco es reconocido con un autómata de una pila, se necesitan dos pilas.

El shift de la hormiga que Borra el Negro es reconocida por un autómata de una pila.

Esta hormiga puede hacer ciclos de largo arbitrario, pero sólo una vez, después de esto el largo de sus ciclos está acotado por 2.

Gracias

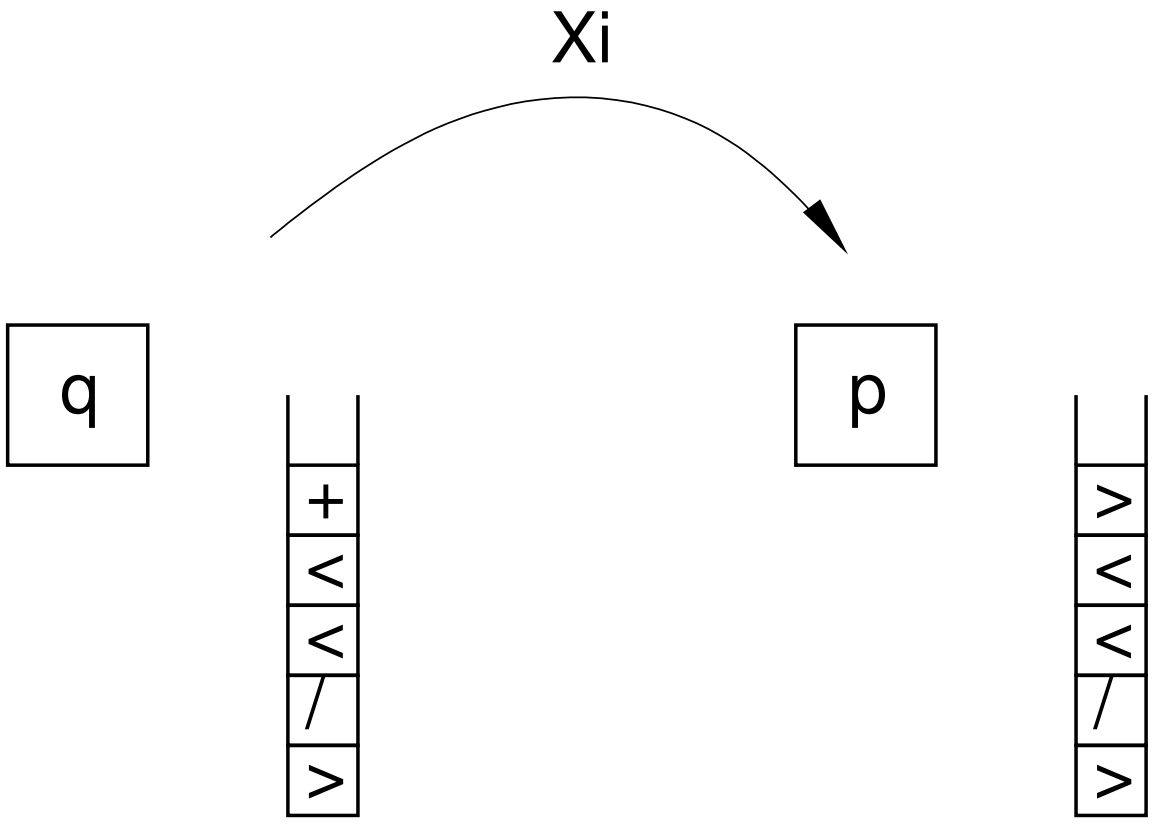
Apéndice

Definición. En un autómata de pila, el estado del sistema está dado por un estado q y una pila de símbolos $a_1..a_k$.

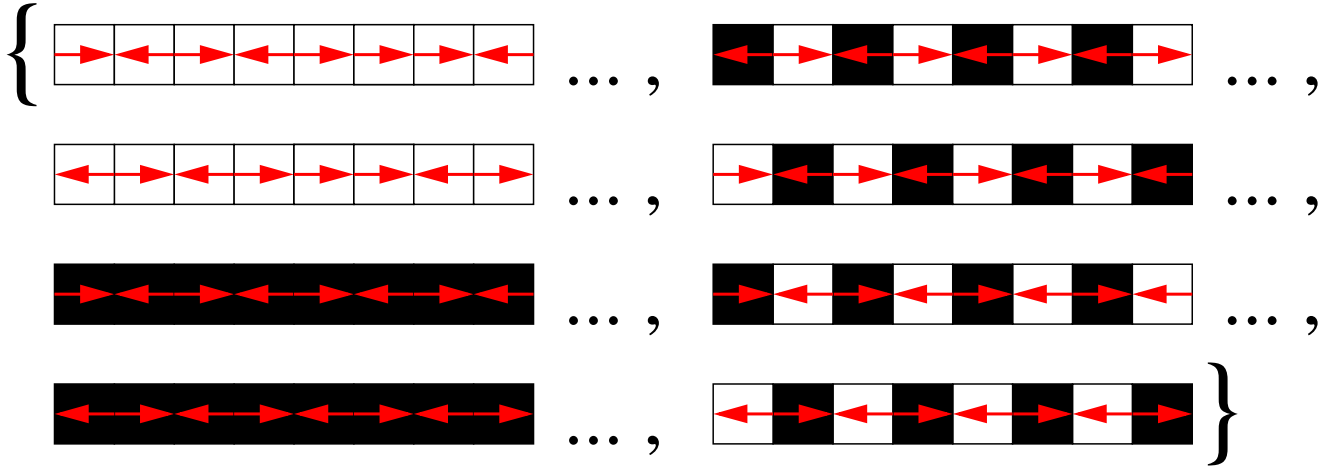
Recibe como entrada un elemento del shift $x = x_1x_2....$

En el paso i, el autómata lee una letra x_i, mira su estado y lee el último símbolo de la pila. Usando su regla de transición λ decide : cambiar de estado y cambiar el último sílbolo de la pila por 0, 1 o 2 símbolos nuevos.

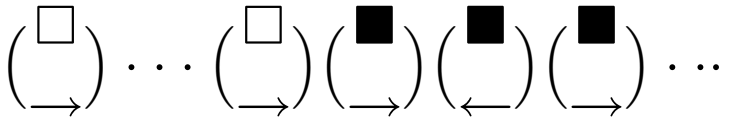
Ej. : si $\lambda(x_i, q, +) = (p, >)$ *entonces :*



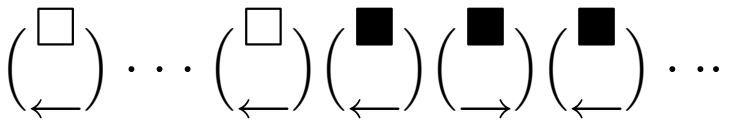
La Hormiga Ciega tiene un subshift finito :



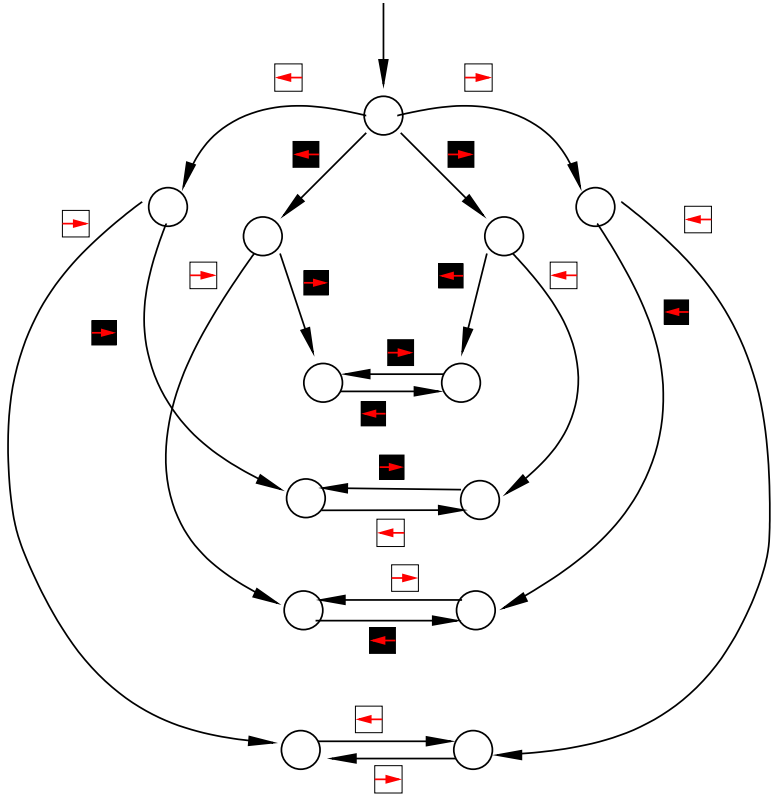
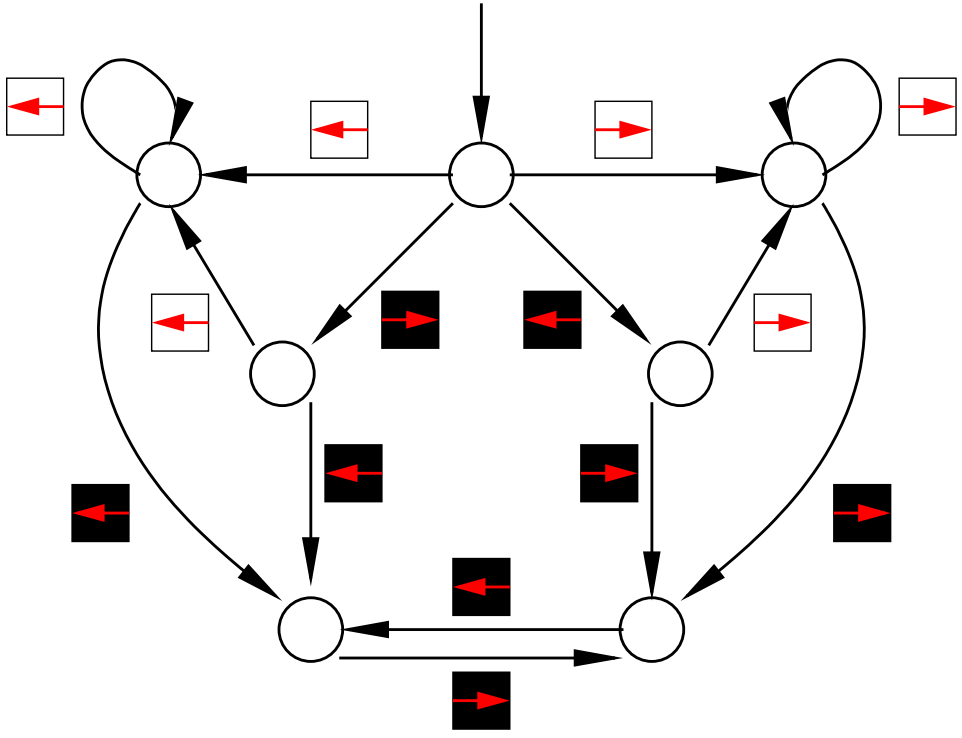
La que ama el negro tiene un subshift infinito pero numerable, sus elementos serán del tipo :



o



El shift de la Hormiga Ciega se reconoce con el autómata :



El shift de la hormiga que ama el negro :