



Listado 5

Teorema de la Función Implícita y Teorema de la Función Inversa
Cálculo III (521227)

1. El volumen específico V , la presión P y la temperatura T de un determinado gas están relacionados por:

$$P = \frac{RT}{V - \beta} - \frac{\alpha}{V^2}, \text{ donde } \alpha, \beta \text{ y } R \text{ son constantes.}$$

Hallar $\frac{\partial T}{\partial P}, \frac{\partial P}{\partial V}$ y $\frac{\partial V}{\partial T}$, además verificar que $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = -1$.

2. Para la función $f(x, y) = (x^3 - 2xy^2, x + y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y el punto $X_0 = (1, -1)$.

- i) Probar que f es inversible en vecindades de X_0 .
- ii) Calcular $J f^{-1}(Y_0)$.
- iii) Hallar una aproximación afín para f^{-1} en vecindades de Y_0 .

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(u, v) = (x, y) \text{ con componentes } x = u \text{ e } y = uv.$$

- i) Mostrar que la transformación T no posee inversa.
 - ii) Mostrar T que es localmente inversible en una vecindad del punto $(1, 1)$, con inversa T^{-1} diferenciable, pero que en cualquier vecindad de $(0, 1)$ la aplicación T no es inyectiva.
4. Mostrar que cerca del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 1, 1, 1)$ se puede resolver el sistema:

$$xu + yvu^2 = 2$$

$$xu^3 + y^2v^4 = 2$$

de manera única para $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ en $(1, 1)$.

5. Probar que cerca del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \pi/2, 0)$ se puede resolver el sistema:

$$\begin{aligned}x^2 - y \cos(uv) + z^2 &= 0 \\x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2 &= 0 \\xy - \sin(u) \cdot \cos(v) + z &= 0\end{aligned}$$

de manera única para x, y y z

como funciones de u y v . Además encontrar $\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

6. Mostrar que el sistema:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 + u^2 + 2v^2 - 5 &= 0 \\x^2 + y^2 - u^2 - v^2 + 4 &= 0\end{aligned}$$

Define implícitamente a $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, con $u(0, 1) = 2$ y $v(0, 1) = -1$. Además encontrar las diferenciales $Du(0, 1)$ y $Dv(0, 1)$ y la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, 1)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea:

$$u = f(x), \quad v = -y + x \cdot f(x).$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, probar que esta transformación es inversible cerca de (x_0, y_0) y que la inversa tiene la forma:

$$x = f^{-1}(u), \quad y = -v + u \cdot f^{-1}(u).$$

8. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y| + 1} \quad \text{y} \quad g(x, y) = |x| + |y|$$

Probar que la función $F = (f, g)$ es localmente inversible en cada punto de

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 8)^2 + (y - 3)^2 < 1\}.$$

9. Considerar la función $F(x, y) = \left((x - y)^2, \frac{x^2}{y} \right)$, $y \neq 0$.

- i) Probar que F admite inversa local en vecindades U_0 de $(-1, 1)$.
- ii) Sea $F^{-1} : V_0 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) = (g(u, v), h(u, v))$ la inversa local de F , calcular la razón de cambio de h en $(4, 1)$ en la dirección del vector $2\hat{i} - \hat{j}$.

10. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(u, v) \mapsto F(u, v)$

una función de clase C^2 que satisface $a \frac{\partial F}{\partial u} + b \frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$.

- i) Verificar que la ecuación $F(x - az, y - bz) = 0$ define a la variable z como función de clase C^1 de las variables x e y .
- ii) Hacer ver que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ cumplen con la relación $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

11. Dada la ecuación $e^{x+y+z} + 2z = x^2y + xy^2 + xy + x + y + 4$.

- i) Probar que esta ecuación define a z como función de clase C^2 de x e y en una vecindad del punto $(-1, 0, 1)$.
- ii) Para (x, y) en una vecindad V de $(-1, 0)$ sea $z = g(x, y)$ la función definida anteriormente. Verificar que el punto $(-1, 0)$ es un punto crítico de g .
- iii) Mostrar que para $(x, y) \in V$ se cumple que:

$$\begin{aligned} (e^{x+y+z} + 2) \cdot z_x &= -e^{x+y+z} + 2xy + y^2 + y + 1 \\ (e^{x+y+z} + 2) \cdot z_y &= -e^{x+y+z} + 2xy + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

- iv) Usando lo anterior hallar los valores de z_{xx} , z_{xy} , z_{yx} y z_{yy} en el punto crítico $(-1, 0)$ y deducir su naturaleza.