U N I V E R S I D A D D E C O N C E P C I O N
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 4
Regla de la Cadena
Cálculo III (521227)

1. **Si** $u(x,y) = xy \cdot f\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$**, encontrar una función** $F(x,y)$ **tal que se verifique la siguiente relación:** $x^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = F(x,y) \cdot u(x,y)$.

2. **Sea** $v = f(x-at) + f(x+at)$**, donde** f **y** g **tienen segundas derivadas parciales y** a **es una constante. Probar que** v **satisface la siguiente ecuación de onda:**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

3. **Verificar que las funciones** $h(t,x)$ **y** $c(t,x)$**, funciones del tiempo** t **y la abscisa** x **dadas por:** $h(t,x) = f\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + F\left(t + \dfrac{x}{a}\right)$; $c(t,x) = \dfrac{g}{a}\left[f\left(t - \dfrac{x}{a}\right) - F\left(t + \dfrac{x}{a}\right)\right]$ **satisfacen los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes:**

$$A \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} = -\dfrac{a^2}{g}\dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} = -\dfrac{1}{g}\dfrac{\partial c}{\partial t} \end{cases} \qquad B \begin{cases} \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 c}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} \end{cases}$$

4. **Mostrar que la función** $w = f\left(\dfrac{r-s}{s}\right)$**, donde** f **es una función real de variable real de clase** C^2 **satisface la E.D.P. siguiente:**

$$\frac{1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial r} = -\frac{1}{rs^2} f'\left(\frac{r-s}{s}\right)$$

5. **Sea** $z = z(x,y)$ **una función de clase** C^2 **y considerar el cambio de variables:** $x = u + v$**,** $y = uv$**. Hallar en términos de las variables** x **e** y**, y en forma simplificada, una expresión para** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

6. **Verificar que la función** $z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right), x \neq 0$ **donde** $f : IR \to IR$ **es diferenciable, satisface la siguiente ecuación:** $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$.

7. **Sea** $z = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$, **con** $f : IR \to IR$ **de clase** C^1. **Calcular y simplificar:**

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

8. **Sea** $z = z(x, y)$ **una función de clase** C^2 **y considerar el cambio de variables:** $x = u$, $y = uv$. **Hallar en términos de las variables** x **e** y, **la expresión:**

$$u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

9. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **una función de clase** C^2 **tal que** $(x, y) \mapsto w = f(x, y)$ **donde:** $x = u + v$, $y = u - v$. **Probar que:** $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

10. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **una función de clase** C^2 **tal que** $(x, y) \mapsto w = f(x, y)$ **con:** $x = e^s \cos(t)$, $y = e^s sin(t)$. **Probar que:** $e^{2s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

11. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **una función de clase** C^2 **tal que** $(x, y) \mapsto g = f(x, y)$. **Si** $x = r\cos\theta$, $y = rsin\theta$. **Demostrar que :** $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$.

12. **La sustitución** $x = e^s$, $y = e^t$ **transforma a** $f(x, y)$ **en** $g(s, t)$ **siendo** $g(s, t) = f(e^s, e^t)$.
Si se sabe que f **satisface la relación:** $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Mostrar que g **satisface:** $\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$.

13. **Considerar** $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, **donde** f **y** g **son funciones de una variable dos veces derivables y** c **es una constante. Probar que** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

14. **Hacer ver que la función** $z = \phi(x^2 + y^2)$, **con** ϕ **diferenciable satisface la ecuación diferencial parcial:** $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.