UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 3

$Calculo\, III$(521227)

Recuerde que f es diferenciable en (x_o, y_o) *si*

(i) *Es continua* $en\,(x_o, y_o)$.

$(ii)\ \exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \frac{f(x,y)-f(x_o,y_o)-f_x(x_o,y_o)(x-x_o)-f_y(x_o,y_o)(y-y_o)}{||(x,y)-(x_o,y_o)||} = 0$

$Algunas\, propiedades:$

$*\, f\, diferenciable \Rightarrow f\, continua\, en\, A$

$*\, Parciales\, C^1\, en\, vecindades\, de\, A \Rightarrow diferenciable\, en\, A$

$*\, No\, existe\, alguna\, derivada\, parcial \Rightarrow NO\, diferenciable.$

$*\, Ec.\, Plano\, Tangente\, o\, Buena\, Aproximación\, Lineal:$

$$z = g(x,y) = f(x_o, y_o) + f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o)$$

$$o\, bien\ \ f_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f_y(x_o, y_o)(y - y_o) + f_z(x_o, y_o)(z - z_o) + f(x_o) = 0$$

$*\, Recta\, Normal\, a\, la\, Superficie\, en\, un\, punto\, dado:$

$$(x, y, z) = (x_o, y_o, z_o) + t \bigtriangledown f(x_o, y_o, z_o)$$

1. $Sea\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, definida: f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$Calcular\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\, y\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$

2.*Analice diferenciabilidad de las siguientes funciones en el punto dado:*

$(a)\, f(x,y) = \sqrt{|xy|}\quad en\,(x_o, y_o) = (0,0)$

$(b)\, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$http://www.udec.cl/\sim manuelsanchez$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y)=\begin{cases} (x-y)^2cos\left(\frac{1}{x-y}\right), & y\neq x \\ 0\ , & y=x \end{cases}$

$3. Determine\, si\, las\, siguientes\, funciones\, son\, clase\, C^1\, o\, no:$

(i) $f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}+3x-2y+z+5\, , & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 5\ , & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

(ii) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(iii) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

4. $Hallar\, la\, ecuación\, del\, plano\, tangente\, a\, la\, superficie\, z=x^2+y^3\, en\, el\, punto\, (3,1,10).$

5. $Para\, la\, función\, f\, de\, la\, pregunta\, 1,\ hallar\, la\, ecuación$ *del plano tangente a su gráfica en el punto (1,1,0). (Claramente primero hay q verificar si es diferenciable o no)*

6. *Con* $f(x,y)=\begin{cases} 2x+y\, , & y\neq x \\ 6\ , & y=x \end{cases}$ $encuentre\, la\, ecuación$ *del plano tangente a su gráfica en* $lso\, siguientes\, puntos:\ (i)\ (x_o,y_o)=(0,0)$

$(ii)\ (x_o,y_o)\ =\ (2,2)$

$(iii)\ (x_o,y_o)=(0,2)$

7. $Sea\, x^3y^2z=12\, una\, superficie\, de\, nivel\, en\, \mathbb{R}^3.\ Encontrar\, las\ ecuaciones\, de\, Pano\, tangente\, y\, recta\, normal\, a\, la\, superficie\, en\, el\, punto\, X_o=(1,\text{-}2,3).$

8. $Encontrar\, la\, derivada\, direccional\, de\, f(x,y,z)=x^2+y^2+xyz^2-zx\, en\, el\, punto\, (1,2,3)\, según\, la\, dirección\, del\, vector\, (1,\text{-}1,0).$ *¿En qué dirección es máxima la derivada dirreccional?¿Cual es ese valor máximo?*

9. *Encontrar una direcciópn en la cual la derivada direccional de f en (1,1) sea nula con f(x,y)=*$\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

10. $Sea\ f(x,y)=\begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\ , & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $,\ pruebe\, que\, la\, derivada\, direccional\, de\, f\, existe\, en\, cualquier\, dirección.$

$http://www.udec.cl/\sim manuelsanchez$

$11.\, Sea\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ definida\, por\, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

$(i)\, Estudie\, si\, f\, continua\, en\, (0,0).$

(ii) ¿$Es\, diferenciable\, en\, (0,0)$?

(iii) *Calcule la derivada direccional de f en (0,0)* $con\, respecto$ *a* **v**= *î + 2j.*

(iv) *Encontrar la ec. del plano* $tangente$ *a la grafica de f en el pto* $(1,1,\ \frac{1}{2})$

$(v)\, Calc.\, la\, razn\, de\, cambio\, de\ \ f\, wn\, (1,1)\, en\, la\, direccion\, de\, 2\hat{\imath} + j.$

$(vi)\, Hallar\, la\, direccion\, en\, la\, que\, f\, crece\, mas\, rapidamente\, en\, la\, direccion\, (1,1)$

$http : //www.udec.cl/ \sim manuelsanchez$