Listado 2
Derivadas Parciales y Diferenciabilidad
Cálculo III (521227)

1. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **definida por:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y}, y \neq -x^2 \\ 0, y = -x^2 \end{cases}$

   y sea $C = \{(x,y) \in IR^2 : y = -x^2\}$

   i) **Estudiar la continuidad de** f **en cada punto de** C**.**
   ii) **Hallar, si existen,** $f_y(1,1)$ **y** $f_x(1,-1)$**.**

2. **Sea** $f : IR^2 \to IR$**, definida por:**

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \sqrt{|x(1+y)|}, x - y \neq 1 \\ 2, x - y = 1, x \geq 0 \\ 0, x - y = 1, x < 0 \end{cases}$$

   Analizar la continuidad de f **en todo** IR^2**.**

3. **Sea** $g : IR^2 \to IR$ **definida por:**

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   i) **Mostrar que** g **es diferenciable en todo** IR^2**.**
   ii) **Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de** g **en los puntos** $(0,0,0)$ **y** $\left(1,2,5\sin\frac{1}{5}\right)$**.**

4. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **definida por:** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Demostrar que f **es clase** C^1 **en todo** IR^2**.**

5. **Sea** $f_p : IR^2 \to IR$ **definida por:** $f_p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2y}{|x|^p+|y|^p}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$

¿ Para qué valores de p **la función** f_p **es diferenciable en** $(0,0)$ **?**

6. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **definida por:** $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ **y** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$**.**

7. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **definida por:**

$$f(x,y)=\begin{cases} (x-y)^2 \cos,\left(\dfrac{1}{x-y}\right), y\neq x \\ 0, y=x \end{cases}$$

- **i)** **Estudiar la continuidad de** f **en** IR^2**.**
- **ii)** **Calcular** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **en todo** IR^2**.**
- **iii)** **Estudiar la continuidad** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **en** IR^2**.**
- **iv)** **Analizar la diferenciabilidad en el punto** $(0,0)$**.**

8. **Sea** $f : IR^2 \to IR$ **definida por:** $f(x,y)=\begin{cases} 2x+y, y\neq x \\ 6, y=x \end{cases}$

Analizar la diferenciabilidad y encontrar la ecuación del plano tangente (cuando corresponda) a la gráfica de f **en** $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ **para:**

i) $(x_0,y_0)=(0,0)$ **ii)** $(x_0,y_0)=(2,2)$ **iii)** $(x_0,y_0)=(0,2)$

9. **Sea** $f : IR^3 \to IR$ **definida por:**

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}+3x-2y+z+5, (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 5, (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

i) **Analizar la continuidad de f en el origen.**

ii) **Calcular f_x, f_y y f_z en todo IR^3.**

iii) **Analizar la continuidad de las derivadas parciales en todo IR^3.**

iv) **Analizar la diferenciabilidad de f en todo IR^3.**

10. Sea $f : IR^2 \to IR$ definida por: $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

i) **Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ donde exista.**

ii) **Analizar la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el origen.**

iii) **Analizar la diferenciabilidad de f en el origen.**

11. Sea $f : IR^2 \to IR$ definida por: $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$

i) **Estudiar la existencia de las derivadas parciales de f en $(0,0)$.**

ii) **Estudiar la existencia del límite siguiente:**

$$\underset{h \to 0}{lím} \frac{f((0,0) + h(a,b)) - f(0,0)}{h}, \text{ con } a, b \in IR.$$

12. Sean f, g las funciones definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x + y^3}{x^2 + y^2} + 3x - 2y, \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determinar:

i) **El límite de f en $(0,0)$.**

ii) **El límite de g en $(0,0)$.**

iii) **Las derivadas parciales de f en $(0,0)$.**

iv) **Las derivadas parciales de g en $(0,0)$.**

v) **Si f es diferenciable en $(0,0)$.**

vi) **Si g es diferenciable en $(0,0)$.**

vii) **Si g es de clase C^1 en IR^2.**