U N I V E R S I D A D D E C O N C E P C I O N
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 14
Cálculo Vectorial II
Cálculo III (521227)

1. **Sea** $C:[0,1]\to IR^3$ **la curva definida por** $C(t)=\left(6t,8t,\frac{1}{2}t^2\right)$.
   - **i)** **Si** f **es el campo escalar definido por** $f(x,y,z)=xy+4z$. **Expresar como una integral simple definida, sin evaluar, la integral** $\int_C f\,dr$.
   - **ii)** **Evaluar la integral de línea** $\int_C F\cdot dr$, **donde** F **es el campo vectorial definido por** $F(x,y,z)=(2z,z,x+y)$.

2. **Sean** C_1 **el segmento orientado desde el punto** $(0,4)$ **al origen,** C_2 **el arco de la parábola** $y=x^2$ **que va desde el origen al punto** $(2,4)$ **y** $C=C_1\cup C_2$. **Evaluar la integral** $\int_C 3y\,dx+2(x^2+y)\,dy$.

3. **Sea** S **la superficie parametrizada por** $\Phi(u,v)=(u,u+v,u^3)$, $\forall(u,v)\in[0,3]\times[0,3]$.
   - **i)** **Calcular** $\|\Phi_u\times\Phi_v\|$.
   - **ii)** **Encontrar la ecuación del plano tangente a** S **en** $\Phi(2,1)=(2,3,8)$.

4. **Considerar la superficie del problema anterior.**
   - **i)** **Expresar el área de la superficie** S **como una integral doble definida.**
   - **ii)** **Expresar** $\iint_S f\,dS$, **donde** f **está dada por** $f(x,y,z)=y-x$, **como una integral doble definida.**
   - **iii)** **Si** $F(x,y,z)=(z,y,4x^2z)$, **calcular** $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$

5. **Sea** S **la porción de la superficie** $z = 5 - 2x - y$ **que está por sobre el rectángulo** $R = [0,2] \times [0,3]$ **contenido en el plano** xy**. Evaluar** $\iint\limits_S (2x + y + z)\, dS$ **.**

6. **Sea** S **la superficie** $\{(x, y, z) \in IR^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$**, orientada con vector normal unitario con tercera componente positiva. Dado el campo vectorial** $F : IR^3 \to IR^3$ **definido por** $F(x, y, z) = (x - z, y, x + z)$**, sin parametrizar la superficie, determinar el valor de la integral de superficie** $\iint\limits_S F \cdot \hat{n} dS$ **.**

7. **Evaluar la integral de línea** $\int\limits_{\partial D} (5x^3 - 8x^2 y)\, dx + (7y^3 + 8xy^2)\, dy$**, donde** D **es el círculo centrado en el origen y de radio** 3 **con borde orientado positivamente.**

8. **Sea** $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ **, Evaluar la integral** $\int\limits_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} \nabla f \cdot dr$ **.**

9. **El cilindro** $x^2 + y^2 = 2x$ **encierra una porción de superficie** S **en la hoja superior del cono** $z^2 = x^2 + y^2$**. Evaluar la integral** $\iint\limits_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$ **.**

10. **Evaluar la integral** $\iint\limits_S (x^2 + 2yz) dS$ **, si** S **es la parte del plano** $2x + y + 2z = 6$ **que se encuentra en el primer octante.**

11. **Calcular** $\iint\limits_S F \cdot \hat{n}\, dS$ **, si** F **es el campo definido por** $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ **y** S **es la superficie del tetraedro limitado por los planos** $x = 0$**,** $y = 0$**,** $z = 0$ **y**

    $x + y + z = a$ **, con** $a > 0$ **.**

12. **Sea** K **el disco cerrado del plano de centro en** $(0,0)$ **y de radio** R **. Evaluar** $\int\limits_{\partial K} -x^2 y\, dx + xy^2\, dy$ **considerando la línea** ∂K **orientada en sentido antihorario.**

13. **Sea** F **el campo vectorial** $F(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$**. Calcular el flujo del campo vectorial a través de la esfera** S**, orientada exteriormente, de radio** 1 **y centrada en el origen.**

14. Sea S la semi-esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ y sea $F: IR^3 \to IR^3$ el campo vectorial definido por $F(x,y,z)=(y+z, z+2x, x+y)$. Verificar la igualdad del teorema de Stokes, considerando a ∂S en sentido antihorario.

15. Sea D la región del primer octante limitada por los planos coordenados y por las superficies $y+z=4$ y $x^2+y^2=16$. Sea S la superficie de D, orientada con normal exterior. Hallar $\iint_S F\cdot \hat{n}\, dS$, donde $F(x,y,z)=2xz\,\hat{i}-xy\,\hat{j}-z^2\,\hat{k}$.

16. Calcular, aplicando el teorema de Green, la integral curvilínea

$$\int_C (2xy+3senh\ x)\,dx+\left(3x^2-8y\right)dy$$

a lo largo de la curva cerrada C, que es el borde dirigido positivamente de la región R del plano limitado por el eje y, y las curvas $y=g(x)$, $y=g(x)+\cos x$, donde $x\in\left[0,\frac{p}{2}\right]$, y $g:\left[0,\frac{p}{2}\right]\to IR$ es una función continua y positiva.

17. Calcular, mediante el teorema de Stokes, la integral curvilínea

$$I=\int_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$$

donde C es la curva intersección entre $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ y los planos coordenados orientada en sentido antihorario; a, b y c son constantes positivas.

18. Hallar el flujo del campo vectorial $F(x,y,z)=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$ a través de la cara externa de la esfera $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$.

19. Hallar $\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS$, donde S es la superficie sobre la semi-esfera $x^2+y^2+z^2=4$; $z>0$ acotada por el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y F está dada por $F(x,y,z)=z\,\hat{i}+xy\,\hat{j}+x\,\hat{k}$.

20. Encontrar el valor de la integral de superficie $\iint_S \nabla\times F\cdot\hat{n}\,dS$, donde S es la parte del plano $x+y+z=1$ encerrada por el cilindro $x^2+y^2=1$ con $F(x,y,z)=yz\,\hat{i}+xy\,\hat{j}+x\,\hat{k}$.

21. **Verificar la igualdad en el Teorema de Stokes dados** $F(x,y,z)=(y-z,x,y)$ **y la superficie** S **que corresponde a la parte del cilindro** $x^2+y^2=1$ **entre los planos** $z=-1$ **y** $z=x+2$**; con el vector normal orientado exteriormente.**

22. **Considerar el campo vectorial** $F: IR^3 \to IR^3$ **definido por la fórmula** $F(x,y,z)=(x^2-y)\hat{i}+4z\,\hat{j}+x^2\,\hat{k}$ **y** S **la superficie del cono truncado** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ **con** $1 \le z \le 2$**.**

i) **Calcular el flujo del campo** $\nabla \times F$ **a través de la superficie** S **que está orientada con vector normal exterior.**

ii) **Calcular la circulación del campo** F **alrededor de la curva** $C_1 : x^2+y^2=4$**,** $z=2$ **,es decir evaluar** $\int_{C_1} F \cdot dr$**, considerando a** C_1 **en sentido antihorario.**

iii) **Escribir la fórmula entregada por el teorema de Stokes para el campo** F **y la superficie** S **para deducir el valor de la integral de línea** $\int_{C_2} F \cdot dr$ **, donde** C_2 **es la curva parametrizada por** $r(t)=\cos t \cdot \hat{i}+sent \cdot \hat{j}+\hat{k}$ **, con** $t \in [0,2p]$**.**

23. **Sea** Ω **la región del espacio interior al cilindro** $x^2+y^2=2y$**, acotada inferiormente por el plano** xy **y superiormente por el paraboloide** $z=4-x^2+y^2$**. Sean** S **la superficie** $\partial\Omega$ **y** $F(x,y,z)=(3x,y^2,xy)$**. Calcular el flujo** $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$ **con** S **orientada exteriormente.**

24. **Dado el campo vectorial** $F(x,y,z)=(x^2+sen\,z)\hat{i}+(xy+\cos z)\hat{j}+e^y\,\hat{k}$**, usar el teorema de Gauss para evaluar** $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dA$**, donde** S **es la superficie que limita al sólido acotado por el plano** xy**, el cilindro** $x^2+y^2=4$ **y el plano** $x+z=6$ **;** $\hat{n}$ **es la normal exterior a** S**.**

25. **Calcular** $\iint_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$ **donde** S **es la parte del paraboloide** $z=8-x^2-y^2$ **acotada por** $z=x^2+3y^2$**.**

26. Sea F el campo de fuerzas $F(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+2}\hat{j} + z\hat{k}$, usar el teorema de Stokes para calcular el trabajo a lo largo del desplazamiento dado por $r(t) = 2\cos t \cdot \hat{i} + \sin t \cdot \hat{j} + (3+\sin t)\hat{k}$ donde $t \in [0,2p]$. ¿Es el campo F un campo vectorial conservativo? ¿Por qué?.

27. Sea F el campo vectorial $F(x,y,z) = (yz, -xz, yz^2)$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2$ con $S_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 : z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in IR^3 : x^2 + y^2 = 2, 0 \leq z \leq 8\}$.

Hallar el valor de $\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dS$, donde $\hat{n}$ es la normal exterior a S.

i) Directamente, parametrizando la superficie S.

ii) Usando el teorema de Gauss y el teorema de Stokes.

28. Calcular $\int_C F \cdot dr$, con $F(x,y,z) = (2y, z, 3y)$ y C es la curva intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ con el plano $z = x + 3$, orientada en sentido antihorario vista desde el origen.

29. Sea F el campo vectorial $F(x,y,z) = (x, 3xy, -2z)$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2$ con

$S_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 : x^2 + y^2 = 2x, 0 \leq z \leq 1\}$ y $S_1 = \{(x,y,z) \in IR^3 : x^2 + y^2 \leq 2,\ z = 0\}$.

Hallar el valor de $\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$, donde $\hat{n}$ es la normal exterior a S.

i) Directamente. ii) Usando el teorema de Gauss.

30. Hallar $\iint_S \nabla \times F \cdot \hat{n}\, dS$ con $F(x,y,z) = (y - z, yz, -xz)$, si S corresponde a las caras del cubo $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$ que no están en el plano xy y $\hat{n}$ es la normal exterior.

31. Determinar el valor de $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, si C es la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x + y + z = 0$, recorrida en sentido antihorario.

32. Determinar el flujo de $F(x,y,z) = (x, -2y, 3z)$, a través de la frontera de la región acotada por $x = y^2$ y $z^2 = 4 - x$ orientada exteriormente.

33. **Un campo escalar** Ψ **de clase** C^1 **tiene las propiedades** $\|\nabla\Psi\|^2 = 4\Psi$ **y** $\nabla\cdot(\Psi(\nabla\Psi)) = 10\Psi$**. Calcular** $\iint_S \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}\,dS$**, donde** S **es una esfera unitaria y** $\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}$ **es la derivada direccional de** Ψ **en la dirección del vector unitario normal exterior a** S**.**

34. **Sea** S **la superficie del cubo den centro en el origen, de aristas paralelas a los ejes coordenados y longitud** 2**, orientada exteriormente. Dadas las funciones** $u(x,y,z) = \cos(p\,x) + 9z^2$ **y** $v(x,y,z) = 3x + y^2$**. Calcular** $\iint_S u\frac{\partial v}{\partial\hat{n}}\,dS$**, aquí** $\frac{\partial v}{\partial\hat{n}}$ **es la derivada direccional de** u **en la dirección del vector unitario normal exterior a la superficie del cubo.**

35. **Sea** $F(x,y,z) = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$**, para** $(x,y,z) \neq (0,0,0)$**.**

i) **Calcular el flujo** $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$ **del campo** F **a través de una esfera de radio** a **centrada en el origen y orientada exteriormente.**

ii) **Hallar la divergencia del campo,** $\nabla\cdot F$**.**

iii) **En la teoría electromagnética, el campo eléctrico creado por una carga puntual** q**, ubicada en el origen es** $E = \dfrac{q}{4pe_0}F$**, donde** e_0 **es una constante.**

Usar parte i), ii) y el Teorema de Gauss para calcular el flujo $\iint_S E\cdot\hat{n}\,dS$ **en los siguientes casos:**

S **es una esfera centrada en el origen.**

S **es la esfera unitaria de centro en el punto** $(2,0,0)$**.**

S **es el elipsoide** $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$**.**