



Listado 13
Cálculo Vectorial I
Cálculo III (521227)

1. Considerar el campo vectorial $F(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$ y la circunferencia unitaria, en la que el punto inicial es $(1, 0)$, recorrida en sentido antihorario. Encontrar $\oint F \cdot dr$.
2. Sea $F(x, y, z) = (3xz^2 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z - y^2)$. Encontrar $I = \int_{\Gamma} F \cdot dr$ donde Γ es el arco de la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 1$ que une los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$ y que está bajo el plano $z = 0$.
3. Calcular $\int_C xdx + ydy + zdz$, a lo largo del arco de hélice C de parametrización $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
4. Sea $F(x, y) = (e^x y^2 + 3x^2 y, 2ye^x + x^3)$. Calcular, si es posible, la función potencial.
5. Hallar una función potencial para el campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (2xyz, x^2 z + 2ye^z, x^2 y + y^2 e^z)$.
6. Sean C_1 y C_2 dos curvas simples y cerradas en el plano xy , disjuntas entre sí, con sentido antihorario y C_2 contenida en la región encerrada por C_1 . Sean $p(x, y)$ y $q(x, y)$ de clase C^1 en un abierto A que contiene ambas curvas y la región entre ellas, tales que $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Verificar que $\oint_{C_1} p dx + q dy = \oint_{C_2} p dx + q dy$.
7. Calcular $\oint_{\gamma} \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, donde γ es la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

8. Calcular el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $F(x, y) = (e^x - y^3)\hat{i} + (\cos y + x^3)\hat{j}$ que recorre la circunferencia unitaria C , en sentido antihorario.
9. Considerar el campo vectorial $F(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\hat{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j} + 3z^2\hat{k}$ y la curva C de parametrización: $x = t$, $y = t^3 + t^2 - 1$, $z = t + 3$. Calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de C desde el punto $P_1(-1, -1, 2)$ al punto $P_2(1, 1, 4)$.
10. Integrar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:
- i) $C(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$
 - ii) $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$
 - iii) $C(t) = \left(\frac{3}{2}t^2, 2t^2, t\right)$, $t \in [0, 1]$
11. Calcular $\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, donde C es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = a^2$ y $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, con a y h positivos.
12. Sean F el campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ y g la curva que se encuentra en el primer octante como intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indicando una orientación para esta trayectoria, calcular $\int_C F \cdot dr$.
13. Calcular la integral de línea de F a lo largo de cualquier curva C que encierra al origen, recorrida una vez en sentido positivo con respecto al vector $\hat{k}$, donde F está dada por $F(x, y) = \frac{x\hat{i}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.
14. Calcular $\int_C (x + 2y)dx + ydy$, si C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ recorrida en sentido antihorario:
- i) Directamente parametrizando la curva.
 - ii) Usando el teorema de Green.

15. Determinar el valor de $\int_g (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz$, donde g es la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x + y + z = 0$.

16. Evaluar $\int_C y^2 dx - x^2 dy$ para los siguientes casos:

- i) C es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que va desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$ en sentido antihorario.
- ii) C es el segmento de recta que va desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$.

17. Mostrar que la integral $\int_C 2x \operatorname{sen} y dx + (x^2 \cos y - 3y^2) dy$ es independiente de la trayectoria. Evaluar la integral sobre alguna línea orientada desde $A(-1,0)$ hasta $B(5,1)$, directamente parametrizando dicha línea. Luego usando la función potencial evaluar nuevamente la integral comprobando así el valor antes obtenido a través de la parametrización.

18. Calcular $\int_L F \cdot dr$, donde F se define por $F(x, y, z) = (2z, 8x - 3y, 3x + y)$ y L es el borde orientado positivamente de la placa triangular ABC , siendo $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,2)$ las coordenadas de los puntos A , B y C respectivamente.

19. Dadas las funciones $p(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2y$ y $q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x$. Calcular $\int_C p dx + q dy$, donde C es la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ recorrida en sentido antihorario.

20. Considerar las funciones p y q del problema 19. Determinar el valor de $\int_C p dx + q dy$, sabiendo que C es el arco de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el primer cuadrante que une $(3,0)$ con $(0,2)$.

21. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por: $F(x, y, z) = 2xy\hat{i} + (x^2 + 1)\hat{j} + 6z^2\hat{k}$ y sea la curva g con representación paramétrica $g : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $g(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t, t)$. Calcular $\int_g F \cdot dr$.

22. Calcular la integral de línea del campo vectorial $F = p\hat{i} + q\hat{j}$, donde $p(x, y) = xy$ y $q(x, y) = x - y$ sobre la curva correspondiente a la frontera del dominio $D = [0, 1] \times [1, 3]$ orientada en sentido antihorario.
23. Calcular la integral de línea $\int_C 2xy \, dx + x^2 \, dy$, cuando C es la curva que une el origen $O(0, 0)$ con el punto $A(2, 1)$ en los siguientes casos:
- C es el segmento orientado que va desde O hasta A .
 - C es el arco de la parábola que pasa por ambos puntos y es simétrica con respecto al eje y .
 - C es el arco de la parábola que pasa por ambos puntos y es simétrica con respecto al eje x .
 - C es la línea quebrada OBA , siendo $B(2, 0)$.
 - C es la línea quebrada ODA , siendo $D(0, 1)$.
24. Evaluar la integral de línea $\int_C F \cdot dr$, donde C es la curva de intersección entre $z = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, vista en sentido antihorario desde la parte superior del eje z y $F(x, y, z) = (2xy^3z, 3x^2y^2z + 4z, x^2y^3 + 4y)$.
25. Hallar el valor de la integral curvilínea $\int_g (e^x + 3x^2y^2) \, dx + (x + 2x^3y) \, dy$, si g es la curva simple cerrada cuya traza es el cuadrilátero de vértices $A(1, 1)$, $B(3, 0)$, $C(2, 2)$ y $D(0, 3)$, recorrida en sentido antihorario.
26. Calcular $\int_g F \cdot dr$ donde g es la curva de intersección entre $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ y $x + y = 2$ con $F(x, y, z) = (y, z, x)$.
27. Sea C la curva que se encuentra en el primer octante como intersección del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4y$. Una partícula se desplaza a lo largo de esta curva, acercándose al plano xy , bajo la acción del siguiente campo gravitatorio:

$$F(x, y, z) = -GmM \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Donde G , m y M son constantes. Calcular el trabajo realizado por la fuerza.

28. Determinar el trabajo realizado sobre un cuerpo que se desplace desde el punto P hasta el punto Q con coordenadas $(4,0,0)$ y $(0,0,4)$ respectivamente, sobre la curva del primer octante que corresponde a la intersección entre las superficies $z = 4 - x$ y $x^2 + y^2 = 4x$, bajo la influencia del siguiente campo vectorial:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x-2)^2 + y^2}, \frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}, z \right).$$

29. Sea g una función real de variable real, de dominio un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, continua sobre I y sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial sobre un abierto A de $\mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2) \left(x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k} \right)$.

- i) Si $f(x, y, z) = \frac{1}{2} h(x^2 + y^2 + z^2)$, y $h(u) = \int g(u) du$, probar que $F = \nabla f$.
- ii) Hallar un potencial para el campo vectorial $G(x, y, z) = \frac{x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$.
- iii) Sea C la hélice de representación paramétrica $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 6t$ para $t \in [0, 2\pi]$. Determinar el valor de la integral de línea:

$$\int_C \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dy + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dz.$$

30. ¿Cuál es la longitud de la hipocicloide que tiene por ecuaciones paramétricas a $x = \cos^3 t$ e $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$?

31. Sea D un dominio simplemente conexo del plano, y f un campo escalar armónico de clase C^2 en D . Demostrar que $\int_C \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = 0$ a lo largo de cualquier curva C simple, cerrada y seccionalmente suave de clase C^1 contenida en D .

32. i) Mediante el teorema de Green probar que el área de la región R interior a una curva C cerrada, simple y seccionalmente suave de clase

$$C^1 \text{ está dada por } A(R) = \frac{1}{2} \left[\int_C -y dx + x dy \right].$$

- ii) Sean $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y C el segmento orientado $[P_1, P_2]$. Verificar que:

$$\int_C -y dx + x dy = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

- iii) Sean $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ los vértices de un polígono.

Demostrar que el área encerrada por él es

$$\frac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

33. Sea $F = F_1 + F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde F_1 y F_2 están definidos por

$$F_1(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ y } F_2(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right).$$

Calcular $\int_C F \cdot dr$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ recorrida en sentido antihorario.

34. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ en $\mathbb{R}^2$.

Para cada $r > 0$ considerar la circunferencia $C_r : x^2 + y^2 = r^2$ recorrida una vez en sentido positivo, y definir $j(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} f dr$ para todo $r > 0$.

- i) Probar que $\lim_{r \rightarrow 0} j(r) = f(0,0)$.
- ii) Verificar que $j'(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{C_r} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy$.
- iii) Deducir que j es constante y que $j(r) = f(0,0)$, $\forall r > 0$.

35. Considerar la línea C de intersección entre las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ y $az = x^2 + y^2$ ($a > 0$) y el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por la fórmula

$$F(x, y, z) = (2xyz, x^2 z + 2ye^z, x^2 y + y^2 e^z).$$

¿Por qué la integral del campo F sobre la línea C es nula?