U N I V E R S I D A D   D E   C O N C E P C I O N
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 11
Integrales Múltiples IV
Cálculo III (521227)

A. Determinar el valor de las siguientes integrales:

1. $I = \iiint_A z \, d(x,y,z)$ **. Donde** A **es el sólido limitado superiormente por la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ **e inferiormente por el cono** $z^2 = x^2 + y^2$ **,** $a > 0$ **.**

2. $J = \iint_B \left(x^2 + y^2\right) d(x,y)$**. Donde** B **es la región del primer cuadrante limitada por las curvas** $xy = 4$**,** $xy = 7$**,** $x^2 - y^2 = 2$ **y** $x^2 - y^2 = 10$**.**

3. $K = \iint_C \dfrac{y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} d(x,y)$**. Donde** C **es la región determinada por las condiciones** $\frac{1}{2} \le y \le 1$ **y** $x^2 + y^2 \le 1$**.**

4. $L = \iint_D (x+y)^2 e^{x-y} d(x,y)$**. Donde** D **es la región acotada por las curvas** $x + y = 1$**,** $x + y = 4$**,** $x - y = -1$ **y** $x - y = 1$**.**

5. $M = \iint_E x^2 y^2 d(x,y)$**. Donde** E **es la región del primer cuadrante acotada por las curvas** $xy = 1$**,** $xy = 2$**,** $y = x$ **e** $y = 4x$**.**

6. $N = \iiint_F xyz\left(x^4 - y^4\right) d(x,y,z)$**.**

Con: $F = \left\{ (x,y,z) \in IR^3 : 1 \le x^2 - y^2 \le 2,\ 3 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0 \right\}$**.**

B. Resolver los siguientes problemas:

1. **Calcular el volumen de la región que se encuentra limitada inferiormente por el paraboloide** $z = x^2 + y^2$ **y superiormente por el plano** $z = 4y$**.**

2. **Encontrar el volumen del sólido que está limitado por las superficies con ecuaciones** $z = -1$**,** $z = x^2 + y^2$ **y** $x^2 + y^2 = x$**.**

3. **Calcular el volumen de la región de** IR^3 **interior a la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **y al cilindro** $x^2 + y^2 = y$**.**

4. **Sea** $B(R) = \{(x, y, z) \in IR^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R\}$ **la bola cerrada de centro en el origen y radio** $R > 0$**, y para cada número real** a **sea:**

$$I(a, R) = \iiint_{B(R)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} \, d(x, y, z).$$

Determinar el valor de $I(a, R)$ **para: i)** $R < a$ **y ii)** $a = 0$**.**

5. **Un sólido está acotado inferiormente e por el plano** $z = 1$**, lateralmente por el cono** $z^2 = x^2 + y^2$ **y superiormente por la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 18$**. Usar integrales triples y un buen sistema de coordenadas para calcular el volumen del sólido.**

6. **Un plano corta un casquete de altura** H **en una esfera de radio** R**,** $0 < H < R$**. Hallar el volumen del casquete.**

7. **Dos esferas de radio** 4 **se intersectan de manera que cada una pasa por el centro de la otra. Calcular el volumen de la región interior a ambas esferas.**

8. **Un sólido** Ω **está limitado inferiormente por el plano** xy**, superiormente por la hoja superior del cono** $3z^2 = x^2 + y^2$ **y lateralmente por la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$**. Calcular el volumen de** Ω**.**

9. **Sea** Φ **la región acotada por** $x^2 + y^2 = 2$ **y por** $z^2 = x^2 + y^2 - 1$**. Hallar el volumen de** Φ**.**

10. Sea Γ la región acotada superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ e inferiormente por $x^2 + y^2 = 3z + 21$. Encontrar el volumen de Γ.

11. Calcular el volumen de la región limitada por las superficies $y^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$, $x\left(y^2 + z^2\right) = 1$ y $x = 0$, con $a < b$.

12. Sea $E = \left\{ (x, y, z) \in IR^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1, a > 0, b > 0, c > 0 \right\}$.

Calcular: i) El volumen de E. ii) $\displaystyle\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) d(x, y, z)$.

13. Calcular el volumen de la región que está acotada lateralmente por los lados del cilindro $x^2 + y^2 = x$, superiormente por el cono $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$, e inferiormente por el plano xy.

14. Encontrar el volumen de la región interior a las superficies $x^2 - 2x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

15. Hallar el volumen de región limitada por $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

16. La rigidez flexural EI de una viga uniforme es el producto de su módulo de elasticidad de Young E y el momento de inercia I de la sección transversal de la la viga en x, con respecto a la recta horizontal l que pasa por el centro de gravedad de esta sección transversal. Aquí

$I = \displaystyle\iint_R [d(x, y)]^2 d(x, y)$, **$d(x, y)$ es la distancia de (x, y) a l y R es la sección transversal de la viga considerada.**

- **i) Hallar I cuando R es el rectángulo $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$ y l es el eje x .**
- **ii) Hallar I cuando R es un círculo de radio 4 y l es el eje x .**

17. Calcular el volumen, usando todos los posibles órdenes de integración, del sólido encerrado por las superficies: $z = 0$, $x + z = 1$ y $x = y^2$.