U N I V E R S I D A D   D E   C O N C E P C I O N
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 10
Integrales Múltiples III
Cálculo III (521227)

1. **Sea** R **la región del plano acotada por** $y = x^2$ **y por** $y^2 = x$**. Probar que:**

$$0 \le \iint_R e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) \le \frac{1}{3}.$$

2. **Hallar el volumen de la región interior a la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ **y sobre la hoja superior del cono** $z^2 sin^2\alpha = (x^2 + y^2)\cos^2\alpha$**, donde** $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$**. Deducir luego el volumen de una esfera.**

3. **Calcular la integral** $\iint_A xy\, d(x,y)$ **si** A **es la región limitada por la traza del paralelogramo con vértices en** $(0,0)$**,** $(2,1)$**,** $(3,4)$ **y** $(1,3)$**.**

4. **Evaluar** $\iint_D \left(x^4 + 2x^2y^2 + y^2\right) d(x,y)$**, donde** D **es la parte del disco de radio** 2 **y centro en el origen que está en el primer cuadrante.**

5. **A través de una esfera de radio** 2 **se perfora un hoyo cilíndrico de radio** $1/2$**. Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido que queda.**

6. **Al calcular por integración doble el volumen** V **situado debajo del paraboloide** $z = x^2 + y^2$ **y limitado inferiormente por una cierta región** S **del plano** xy**, se ha llegado a la suma de integrales:**

$$V = \int_0^1 \left[\int_0^y \left(x^2 + y^2\right) dx \right] dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} \left(x^2 + y^2\right) dx \right] dy$$

Dibujar la región S y expresar el volumen V mediante una integral iterada en la que el orden de integración esté invertido. Efectuar, también, la integración y calcular V.

7. **Hallar** $\iiint_D \left(x^2 + y^2\right) z \, d(x, y, z)$**, con** $D = \left\{(x, y, z) \in IR^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\right\}$.

8. **Sea** R **la región del plano acotada por** $xy = 1$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$. **Usando el cambio de variables** $x = u$, $y = \dfrac{v}{u}$, **calcular la integral** $\iint_R \dfrac{xy}{1 + x^2 y^2} \, d(x, y)$.

9. **Sea** A **el dominio determinado por dos triángulos, uno de ellos de vértices** $(0,0)$; $\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ **y** $\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$, **el otro de vértices** $(0,0)$; $\left(0, -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ **y** $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0\right)$. **Hallar** $\iint_A sen(x - y)^2 \, d(x, y)$.

10. **Encontrar** $\iint_R \sqrt{4x^2 - y^2} \, d(x, y)$**, donde es** $R = \left\{(x, y) \in IR^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}$.

11. **Sean** $f : IR \to IR$ **continua y** D **el triángulo de vértices** $(0,0)$; $(1,0)$ **y** $(0,1)$. **Determinar el valor de la siguiente integral** $\iint_D f(x + y) \, d(x, y)$ **en función de una variable auxiliar.**

12. **Hallar el volumen de la región** $A = \left\{(x, y, z) \in IR^3 : x^2 + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$.

13. **Calcular** $\iiint_T \left(x^2 + y^2\right) d(x, y, z)$**, donde** $T = \left\{(x, y, z) \in IR^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, 0 \leq z \leq 1\right\}$.

14. **Sea** S **la región del primer cuadrante limitada por las rectas** $y = 0$, $y = x$ **y las circunferencias** $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$ **y** $x^2 + y^2 = 1$. **Evaluar** $\iint_S \dfrac{x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, d(x, y)$.

15. Si $A=\{(x,y)\in IR^2 : x\geq 0, 1\leq y\leq 2, y\geq x^2\}$ **, calcular** $\iint\limits_A xe^{-\frac{x^2}{y}}\,d(x,y)$**.**

16. Calcular $\int_1^{10}\int_{\sqrt{y-1}}^{3} e^{x^3}\,dx\,dy$ **.**

17. Evaluar $\iint\limits_D (1+x^2+y^2)^{3/2}\,d(x,y)$ **donde** D **es el disco unitario.**

18. Usando integrales triples determinar el volumen dentro del cilindro $x^2+y^2=9$ **y fuera del cono de ecuación** $z^2=x^2+y^2$ **.**