



Listado 9
Integrales Múltiples II
Cálculo III (521227)

En los ejercicios 1 a 14, evaluar la integral iterada.

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$

8. $\int_{-1}^2 \int_2^4 (2x^2 y + 3xy^2) dx dy$

2. $\int_1^3 \int_{-1}^1 (2x - 4y) dy dx$

9. $\int_{-1}^0 \int_2^5 dx dy$

3. $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$

10. $\int_4^6 \int_{-3}^7 dy dx$

4. $\int_{-2}^0 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy dx$

5. $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$

12. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x \cos(xy) dy dx$

6. $\int_0^2 \int_0^1 y \operatorname{sen} x dy dx$

13. $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xy e^{y^2 x} dy dx$

7. $\int_0^3 \int_0^1 x(x^2 + y)^{1/2} dx dy$

14. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$

En los ejercicios 15 a 19, evaluar la integral doble sobre la región rectangular.

15. $\iint_R 4xy^3 d(x, y); R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$

16. $\iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} d(x, y); R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
17. $\iint_R x\sqrt{1-x^2} d(x, y); R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$
18. $\iint_R (x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x) d(x, y); R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}\}$
19. $\iint_R \cos(x+y) d(x, y); R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}\}$

En 20 a 25, la integral iterada representa el volumen de un sólido. Dibujar el sólido en el espacio.

20. $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$

23. $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2} dy dx$

21. $\int_0^1 \int_0^1 (2-x-y) dy dx$

24. $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 (x^2 + y^2) dx dy$

22. $\int_2^3 \int_3^4 y dx dy$

25. $\int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dy dx$

En los ejercicios 26 a 30, usar integrales dobles para encontrar el volumen:

26. **Bajo el plano** $z = 2x + y$ **y sobre el rectángulo**
 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 2\}$.

27. **Bajo la superficie** $z = 3x^3 + 3x^2y$ **y sobre el rectángulo**
 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.

28. **Que se encuentra en el primer octante, entre los planos coordenados y los planos** $y = 4$ **y** $x/3 + z/5 = 1$.

29. Que se encuentra en el primer octante, y está acotado por la superficie $z = x^2$ y los planos $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$ y $z = 0$.

30. Que se encuentra en el primer octante, entre los planos de ecuaciones $x = 0$, $z = 0$, $x = 5$, $z - y = 0$ y $z = -2y + 6$.

31. Sea $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Mostrar que
$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy.$$

32. Hallar $\iint_S x \cos(xy) \cos^2(\pi x) d(x, y)$, si $S = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, \pi]$.

33. Hallar el área de la región limitada por $y^2 = 2x$ e $y = x$.

34. Calcular $\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x + y) dx dy$.

35. Calcular $\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx$.

36. Hallar el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y por el plano de ecuación $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{9} = 1$.

37. Hallar el volumen de la región limitada por $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$.

38. Determinar $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$, si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

39. Encontrar $\iint_E e^{-(x^2+y^2)} d(x, y)$, si $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

40. Hallar el área acotada por $xy = 4$, $xy = 8$, $xy^3 = 5$ y $xy^3 = 15$.

41. Encontrar el área de la región del primer cuadrante limitada por

$$y = x^3, \quad y = 4x^3, \quad x = y^3 \quad \text{y} \quad x = 4y^3.$$

42. Calcular $\int_0^1 \int_0^1 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xyz \, dz \, dy \, dx$.

43. Hallar la masa de la región del primer octante que es interior a la esfera de radio 4 y centro en el origen, sabiendo que la densidad está dada por xyz .

44. Hallar el volumen limitado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x$.

45. Calcular el volumen acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy .

46. Hallar $\iiint_R \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z)$, donde R es la región del espacio limitada por el plano $z = 3$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

47. Encontrar el volumen del sólido encerrado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x^2 + y^2$.

48. Evaluar $\iiint_R \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, d(x, y, z)$, si R es la región del espacio acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a > b > 0$.

49. Hallar la masa de un cilindro circular recto de radio a y altura b , si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia a un punto de la circunferencia de la base.

50. Una esfera de radio a tiene un hueco cilíndrico de radio b cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera. Hallar el volumen interior a la esfera y exterior al hueco.

51. Calcular el volumen acotado por los cilíndricos hiperbólicos

$$xy = 1, \quad xy = 9, \quad xz = 4, \quad xz = 36, \quad yz = 25 \quad \text{e} \quad yz = 49.$$

52. Calcular $\iiint_T f(x, y, z) d(x, y, z)$, si f está dada por $f(x, y, z) = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

53. A partir del cambio de variables dado por $x = u - v$, $x = u + v$, determinar el valor de la integral $\iint_S e^{-(x^2 + xy + y^2)} d(x, y)$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

54. Sean $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que $f(1, 1) = 6$, $f(1, -1) = 3$, $f(0, 1) = 1$ y $f(0, -1) = 2$. Encontrar :

$$\iint_D f_{xy}(x, y) d(x, y).$$