UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 7
Funciones definidas por integrales
Cálculo III (521227)

1. Calcular $F'(x)$ usando la regla general de derivación bajo el signo integral:

i) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \cos t^2 \, dt$ **ii)** $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \sin(xt)\, dt$

2. Sea $h : IR \to IR$ una función impar de clase C^1. Probar que la función $F : IR \to IR$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} [h(t+x) + h(t-x)]\, dt$ es constante.

3. Calcular $\displaystyle\lim_{t \to 0} \int_0^1 (3x-1)\cos(tx)\, dx$.

4. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$, $x > 0$

i) Justificar que F es dos veces derivable.

ii) Calcular y simplificar la expresión siguiente: $F''(x) + F(x)$

5. Hallar $\phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\, dt$, eliminando el parámetro t.

6. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{x - \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\forall x \in]1, \infty[$. Calcular $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{(2 - \cos t)^2}$

7. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + x}$. Sin calcular la integral probar que F es continua sobre el intervalo $[1, \infty[$.

8. Sea $F(x)=\int_0^{x^4} Arctg\frac{t}{x^4}\,dt$ **. Calcular** $F'(x)$ **para** $x>0$**.**

9. Para $x\geq 0$ **sean:** $F(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ **y** $G(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ **.**

i) **Probar que** F **es derivable sobre** $[0,\infty[$ **y que** $F'(x)=2\sqrt{F(x)}\,e^{-x^2}$ **,** $\forall x\in[0,\infty[$**.**

ii) **Probar que** G **es derivable y que** $G'(x)=-F'(x)$ **,** $\forall x\in[0,\infty[$**.**

iii) **Probar que la función** $H:[0,\infty[\to$ **IR definida por:** $H(x)=F(x)+G(x)$ **es constante y además encontrarla.**

iv) **Calcular** $I=\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ **.**

10. Dada la función: $\phi(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ **,** $\forall\alpha\in IR$**.**

i) **Probar que** $\phi(\alpha)$ **es derivable sobre** IR **.**

ii) **Mostrar que** ϕ **satisface la ecuación diferencial:** $\phi'(\alpha)=-\frac{\alpha}{2}\phi(\alpha)$**.**

iii) **Calcular** $\phi(\alpha)$**.**

11. Demostrar que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}(\ln x)^n dx=(-1)^n n!2^{n+1}$**.**

12. i) Probar que $\int_0^\infty e^{-t}\cos(xt)\,dt=\frac{1}{1+x^2}$ **y que la convergencia es uniforme.**

ii) Deducir que $\int_0^\infty e^{-t}\frac{sen(\sqrt{3}t)}{\mathrm{t}}dt=\frac{\pi}{3}$ **.**