**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION**
**FAC. DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS**
**DEPTO. DE MATEMATICA**

CÉSAR FLORES S.

# Funciones definidas por integrales

Versión $\beta$

Se trata de funciones de la forma

$$F(x) = \int f(x, y)dy.$$

La función $f(x, y)$ se integra con respecto a la variable $y$, quedando una función que depende de $x$.

**Ejemplos**.

$$\begin{aligned}
&1.- \qquad F(x) = \int_0^1 (1 + xy)dy = 1 + x/2 \\
&2.- \qquad F(x) = \int_0^1 y^x dy = \frac{1}{x+1} \quad (x > -1) \\
&3.- \qquad F(x) = \int_0^\infty e^{-xy^2} dy \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

El asunto es estudiar las propiedades de derivabilidad de $F$.

**Teorema 1** (*Límites de integración fijos y $f$ integrable*) Sea

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)dy \quad (x \in I)$$

donde $f$ es una función dada, bien definida e integrable para $x \in I$, $y \in [a, b]$.

(i) $F$ es continua, siempre que $f$ sea continua.

(ii) $F$ es derivable y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x, y)dy\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$$

(la derivada pasa bajo la integral), siempre que $f$ y $\partial f/\partial x$ sean continuas.

**Observación**. La frase *$f$ es una función dada, bien definida e integrable para $x \in I$, $y \in [a, b]$* descarta funciones con singularidades (puntos donde el valor de la función se hace infinito).

**Ejemplos**.

$$
\begin{aligned}
&1.- \qquad F(x) = \int_0^1 (1+xy)dy \implies F'(x) = \int_0^1 ydy\\
&2.- \qquad F(x) = \int_0^1 y^x dy \implies F'(x) = \int_0^1 \log(y) y^x dy \quad (x>0)\\
&3.- \qquad F(x) = \int_0^\infty e^{-xy^2} dy \implies F'(x) = \int_0^\infty -y^2 e^{-xy^2} dy \quad (x>0).
\end{aligned}
$$

También pueden considerarse funciones con límites de integración variables.

**Ejemplos**.

$$
\begin{aligned}
&1.- \qquad F(x) = \int_0^x (1+xy)dy = x + x^3/2\\
&2.- \qquad F(x) = \int_0^{x^2} y^x dy = \frac{x^{2(x+1)}}{x+1} \quad (x>0)\\
&3.- \qquad F(x) = \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-xy^2} dy \quad (x>0).
\end{aligned}
$$

En este caso la regla de derivación, conocida como *regla de Leibniz* es una combinación entre el paso de la derivada bajo la integral (Teorema 1) con el Teorema fundamental del Cálculo ( $d/dx[\int_0^x f(y)dy] = f(x)$ ) y la Regla de la Cadena ( $d/dx[\int_0^{\alpha(x)} f(y)dy] = f(\alpha(x))\alpha'(x)$ ).

**Teorema 2** (*Límites de integración variables y $f$ integrable*) Sea

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \quad (x \in I)$$

donde $f$ es una función dada, bien definida e integrable para $x \in I$, $\alpha(x) \le y \le \beta(x)$, y $\alpha, \beta$ son funciones dadas de 1 variable.

(i) $F$ es continua, siempre que $f, \alpha, \beta$ sean continuas.

(ii) $F$ es derivable y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy + \left[f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x)\right].$$

(la derivada pasa bajo la integral) + [otro término que proviene del Teor. Fund. del Cálculo ] , siempre que $f$ y $\partial f/\partial x$ sean continuas y $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sean continuas.

**Ejemplos**.

$$
\begin{aligned}
1.- \qquad & F(x) = \int_0^x (1+xy)dy \implies \\
& F'(x) = \int_0^x y\,dy + (1+x^2) \\
2.- \qquad & F(x) = \int_0^{x^2} y^x dy \quad (x>0) \implies \\
& F'(x) = \int_0^{x^2} \log(y) y^x dy + x^{2x}\cdot 2x \quad (x>0) \\
3.- \qquad & F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x>0) \implies \\
& F'(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} -y^2 e^{-xy^2} dy - e^{-x^2}\cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x>0).
\end{aligned}
$$

En el caso que la integral es impropia, es decir, que involucra límites de integración infinitos (Ejemplo 3) o que la función $f(x,y)$ tiene puntos singulares (ver la función $F'$ del ejemplo 2), surgen ciertas dificultades debido al problema de la convergencia de la integral. Sin embargo, la regla de Leibniz de derivación sigue siendo la misma *siempre que todas las itegrales impropias involucradas sean (uniformemente) convergentes*. Por lo tanto, en este caso se debe hacer un análisis adicional sobre la convergencia de las integrales.

**Ejemplos**.

$$
\begin{aligned}
1.- \qquad & F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-xy^2} dy \\
2.- \qquad & F(x) = \int_0^{\infty} \frac{cos(xy)}{x^4+y^2} dy \\
3.- \qquad & F(x) = \int_0^{x^2} \log(y) y^x dy \\
4.- \qquad & \Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy.
\end{aligned}
$$

La principal herramienta para el estudio de la convergencia de integrales impropias es la *comparación*.

**Teorema 3** (*Convergencia de integrales impropias*) Sea

$$F(x) = \int_a^{\infty} f(x,y)dy \quad (x\in I)$$

donde $f$ es una función dada.
Si existe una *función mayorante* $h(y)$ tal que

$$|f(x,y)| \le h(y) \ \ \forall x \in I \qquad \text{y} \qquad \int_a^{\infty} h(y)dy < \infty,$$

donde $I$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces la integral impropia que define $F$ *converge uniformemente para* $x\in I$.

**Ejemplos**.

(1)

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\infty} e^{-xy^2} dy.$$

En este caso, claramente, la integral impropia converge para $x \in ]0,\infty[$.

Para ver la convergencia *uniforme* se aplica el teorema anterior.

Si se toma $x \in I = [r, d]$, con $d \geq r > 0$ se tiene

$$e^{-xy^2} \leq h(y) = e^{-ry^2} \quad \forall x \in I.$$

Como

$$\int_0^\infty h(y)dy < \infty$$

(se toma el límite inferior 0 porque $\sqrt{x} \geq 0$), se sigue del teorema que la integral converge uniformemente en $I$. Esto ocurre para cualquier *sub -intervalo compacto* de $]0, \infty[$. Cuando ocurre esto se dice que la integral *converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $]0, \infty[$.

(2)

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{cos(xy)}{x^4 + y^2} dy$$

Claramente, la integral converge para todo $x \neq 0$.
Veamos la convergencia *uniforme*. Consideremos el caso $x \in ]0, \infty[$
Si se toma $x \in I = [r, d]$, con $d \geq r > 0$ se tiene

$$\left| \frac{cos(xy)}{x^4 + y^2} \right| \leq \frac{1}{x^4 + y^2} \leq h(y) = \frac{1}{r^4 + y^2}.$$

La función $h(y)$ es integrable entre $0, \infty$, de manera que la integral impropia converge *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $]0, \infty[$. Similarmente, se ve la integral impropia converge *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $] - \infty, 0[$.

(3)

$$\int_0^{x^2} \log(y) y^x dy$$

El integrando tiene una posible singularidad en $y = 0$. REcordemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ el crecimiento de la función logaritmo cerca del 0 es más lento que el de $1/y^\varepsilon$, esto es, $log(y) \leq C/y^\varepsilon$ para alguna constante $C$, cuando $y \approx 0$. Esto implica que la integral converge para $x > -1$.
Además, tomando $x \in [r, d]$ con $r > -1$ se tiene

$$|\log(y) y^x| \leq C y^{x-\varepsilon} \leq \widetilde{C} y^{r-\varepsilon} =: h(y).$$

Como $r > -1$, $r - \varepsilon$ sigue siendo $> -1$ (se toma $\varepsilon \approx 0$) y luego $\int_0^y h(y)dy < \infty$. En conclusión, la integral converge *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $] - 1, \infty[$.

(4)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$$

En este caso la integral converge para todo $x > 0$ y converge *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $]0, \infty[$, como puede verse haciendo el análisis correspondiente. Debe notarse que aquíel análisis es más delicado pues, además del límite de integración infinito, el integrando tiene una singularidad en $y = 0$ (para $x < 1$). Una manera de separar estos 2 problemas es descomponiedo la integral en una suma:

$$\int_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy + \int_1^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$$

y analizar por separado las 2 integrales.

Finalmente, para la aplicación de la fórmula de Leibniz de derivación se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4** (*Condiciones para Leibniz en integrales impropias*) Sea
$$F(x) = \int_a^\infty f(x,y)dy \quad (x \in J)$$
donde $f$ es una función dada.
La función $F$ es derivable y se aplica la regla de Leibniz
$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \quad (x \in J),$$
(en el caso de límite de itegración variable se aplica la fórmula corrspondiente), siempre que las integrales impropias para $F$ y $F'$ sean convergentes uniformemente sobre los subconjuntos compactos $I \subseteq J$.

**Ejemplos**.

(1)
$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-xy^2}dy.$$
Ya sabemos que la integral converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $]0,\infty[$.
Aplicando Lebniz,
$$F'(x) = \int_{\sqrt{x}}^\infty -y^2e^{-xy^2}dy - e^{-x^2}/(2\sqrt{x}).$$
Para justificar la validez de la fórmula se debe estudiar la convergencia uniforme de la integral de arriba.

(2)
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{cos(xy)}{x^4+y^2}dy$$
Ya sabemos que la integral converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $]-\infty,0[$.
Aplicando Leibniz
$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{-y(x^4+y^2)\,sen(xy) - 4x^3cos(xy)}{x^4+y^2}dy$$
Para justificar la validez de la fórmula se debe estudiar la convergencia uniforme de la integral de arriba.

(3)
$$\int_0^{x^2} \log(y)y^x dy$$
Ya sabemos que la integral converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $]-1,\infty[$.
Aplicando Leibniz
$$F'(x) = \int_0^{x^2} \log^2(y)y^x dy + 2\log(x)x^{2x}\cdot 2x.$$
Para justificar la validez de la fórmula se debe estudiar la convergencia uniforme de la integral de arriba.

(4)
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1}e^{-y}dy$$
La integral converge *uniformemente sobre los subconjuntos compactos de* $]0,\infty[$.
Aplicando Leibniz,
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty \log(y)y^{x-1}e^{-y}dy.$$
Para justificar la validez de la fórmula se debe estudiar la convergencia uniforme de la integral de arriba.

Una aplicación típica de lo anterior es el cálculo de algunas integrales complicadas.

**Ejemplo**. Calcular la itegral
$$I = \int_0^1 \log^2(x) x^n dx.$$

Solución. Nótese que si
$$F(n) = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$
se tiene
$$F'(n) = \int_0^1 \log(x) x^n \qquad \text{y} \qquad F''(n) \int_0^1 \log^2(x) x^n dx.$$
Así, como
$$F''(n) = \frac{d^2}{dn^2} \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)^3},$$
el valor de la integral es $2/(n+1)^3$.