

## PAUTA EXAMEN DE RECUPERACION (02/12/2004)

### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)

RBP/LNB/rbp

#### Problema 1.

a) Determine la(s) región(es)  $\Omega$  del plano tal que para todo  $(x_0, y_0) \in \Omega$  se puede garantizar la existencia de una única solución del PVI

$$y' = x \sqrt[3]{y} + \frac{2y}{x}, \quad y(x_0) = y_0.$$

10 puntos

b) Resolver el PVI de la parte a), considerando  $(x_0, y_0) = (-1, 8)$ .

10 puntos

#### Pauta

La ecuación es de la forma  $y' = f(x, y)$ , siendo  $f(x, y) = x \sqrt[3]{y} + \frac{2y}{x}$ .

i)  $f$  es continua en  $\Omega_I := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\}$

ii) Derivando  $f$  respecto a  $y$ , tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{3y^{2/3}} + \frac{2}{x},$$

la cual es continua en  $\Omega_{II} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ .

5 puntos

Así,  $f$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son continuas en  $\Omega := \Omega_I \cap \Omega_{II} = \Omega_{II}$ .

3 puntos

De esta manera, el teorema de existencia y unicidad (visto en clase), garantiza la solubilidad única de la ecuación si  $(x_0, y_0)$  cae dentro de alguna de las regiones (conexas)

$\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ ,  $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y > 0\}$ ,  
 $\Omega_3 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y < 0\}$ ,  $\Omega_4 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y < 0\}$ .

2 puntos

b) Notamos que estamos frente a Ecuación de tipo Bernoulli:

$$y' - \frac{2}{x}y = x y^{1/3} \quad \Rightarrow \quad y^{-1/3} y' - \frac{2}{x} y^{2/3} = x, \quad (y \neq 0),$$

la cual, haciendo el cambio:  $z = y^{2/3}$ , se convierte en la EDO lineal de primer orden:

$$z' - \frac{4}{3x} z = \frac{2}{3} x,$$

con condición inicial  $z(-1) = 4$ . El factor integrante es  $\mu(x) = \exp\left(-\int \frac{4}{3x} dx\right) = x^{-4/3}$ . Multiplicando la EDO previa por  $\mu(x)$ , se obtiene

$$\left(x^{-4/3} z\right)' = \frac{2}{3} x^{-1/3}, \quad \Rightarrow \quad z(x) = x^2 + C x^{4/3}, \quad \boxed{7 \text{ puntos}}$$

cuya constante  $C \in \mathbf{R}$  resulta ser igual a 3.  
Esto implica que

**1 punto**

$$y(x) = \left(x^2 + 3x^{4/3}\right)^{3/2}. \quad \boxed{2 \text{ puntos}}$$

**Problema 2.** **10 puntos** En una reacción química, cierto compuesto se transforma en otra sustancia a una razón proporcional a la cantidad no transformada. Si inicialmente habían 20 gramos del compuesto original y después de una hora quedan 16 gramos, ¿qué cantidad de la sustancia transformada habrá al cabo de dos horas?

**Pauta**

Sea  $x(t)$  la cantidad (en [g]) de la sustancia transformada al cabo de  $t$  horas. Del enunciado se tiene que el PVI que rige la reacción es:

$$\frac{dx}{dt} = k(20-x), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 4, \quad \boxed{4 \text{ puntos}}$$

siendo  $k$  la constante de proporcionalidad. Resolviendo el PVI, se obtiene que

$$x(t) = 20 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^t\right). \quad \boxed{5 \text{ puntos}}$$

Luego, al cabo de 2 horas habrán  $x(2) = 7,2$  [g] de la sustancia transformada. **1 punto**

**Problema 3.** Resuelva el PVI

**15 puntos**

$$y'' - 3y' + 2y = 2\delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Pauta**

Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación propuesta, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y''(t)] - 3\mathcal{L}[y'(t)] + 2\mathcal{L}[y] &= 2\mathcal{L}[\delta(t-1)] \\ \Rightarrow s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) - 3(s \mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] &= 2e^{-s} \\ \Rightarrow (s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}[y(t)] &= 2e^{-s} + 1 \end{aligned} \quad \boxed{6 \text{ puntos}}$$

De esta manera, procedemos a despejar  $\mathcal{L}[y(t)]$ , para luego calcular  $y(t)$  aplicando la transformada inversa de Laplace y algunas de sus propiedades (en especial la segunda

propiedad de traslación), con lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y(t)] &= \frac{1}{(s-1)(s-2)} + \frac{2e^{-s}}{(s-1)(s-2)} \\ \Rightarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}\right] \\ \Rightarrow y(t) &= g(t) + 2H_1(t)g(t-1),\end{aligned}$$

**4 puntos**

donde

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \\ \Rightarrow g(t) &= e^t * e^{2t} = \int_0^t e^{t-\tau} e^{2\tau} d\tau = e^{2t} - e^t.\end{aligned}$$

**3 puntos**

Finalmente, la solución del PVI dado es

$$y(t) = (e^{2t} - e^t) + 2H_1(t)(e^{2(t-1)} - e^{(t-1)}).$$

**2 puntos**

**Problema 4.** Determine la solución general del siguiente sistema.

**15 puntos**

$$\begin{cases} x' = -2x + e^{-2t} \\ y' = 4x - 2y \\ z' = x - 2z \end{cases}$$

**Pauta**

La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como  $X' = AX + B(t)$ , siendo

$$X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B(t) := \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como  $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$ , donde  $X_H(t)$  denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y  $X_P(t)$  es una solución particular del sistema original.

a) **Cálculo de  $X_H(t)$ :** calculando los valores propios de  $A$ , éstos son los ceros del polinomio característico  $p(\lambda) := |A - \lambda I| = -(\lambda + 2)^3$ , es decir,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ . El respectivo espacio propio asociado está dado por:

$$S_{\lambda_1} = \langle \{(0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\} \rangle.$$

Así tenemos dos soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

**5 puntos**

**Hallando**  $X_3(t) = (u_1 + u_0 t) e^{-2t}$ , siendo  $u_0, u_1 \in \mathbf{R}^3$  a determinar.

**1 punto**

Para esto, primero caracterizamos el espacio rango de  $A + 2I$ , el cual viene dado por

$$ER(A+2I) := \{B = (a, b, c)^T \mid r(A+2I|B) = r(A+2I)\} = \{(a, b, c)^T \mid a = 0, b = 4c\}$$

Luego,  $u_0$  y  $u_1$  se buscan (y escogemos una de las soluciones admisibles) tal que satisfagan:

$$(A + 2I) u_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 = (0, 4, 1)^T$$

$$(A + 2I) u_1 = u_0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = (1, 0, 0)^T.$$

**3 puntos**

De esta manera, se tiene  $X_3(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 4te^{-2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$ , con lo que la solución general del sistema homogéneo es

$$X_H(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 4te^{-2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix},$$

siendo  $C_1, C_2$  y  $C_3$  constantes reales arbitrarias.

**1 punto**

b) **Cálculo de  $X_P(t)$** : usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que  $X_P(t) = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t) + C_3 X_3(t)$ , donde  $C_1(t), C_2(t)$  y  $C_3(t)$  se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-2t} \\ e^{-2t} & 0 & 4te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ C_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo resulta (**nota**: al integrar, proporcionamos sólo una primitiva):

$$C_3'(t) e^{-2t} = e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad C_3'(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_3(t) = t$$

$$C_1'(t) e^{-2t} + 4te^{-2t} C_3'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1(t) = -2t^2$$

$$C_2'(t) e^{-2t} + te^{-2t} C_3'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2(t) = -\frac{t^2}{2},$$

con lo que resulta

$$X_P(t) = \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ 2t^2 e^{-2t} \\ \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} \end{pmatrix},$$

**4 puntos**

con lo que concluimos que la solución general del sistema propuesto es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 4te^{-2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-2t} \\ 2t^2 e^{-2t} \\ \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} \end{pmatrix},$$

**1 punto**

siendo  $C_1, C_2$  y  $C_3$  constantes reales arbitrarias.