

Problema 1. Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x + \cos(\ln(x)). \quad (1)$$

(i) Efectuando el cambio de variable $x = \exp(t)$, reduzca (1) a una EDO lineal no homogénea. Justifique su respuesta.

(ii) Encuentre la solución de (1) para $x > 0$, que satisfaga las condiciones:

$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Pauta:

(i) Aplicando la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right).$$

De esta forma la ecuación (1) se convierte, al efectuar el cambio de variable $x = e^t$, en

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) - y(t) = e^t + \cos(t).$$

(ii) Notamos que la ecuación (1) es de Euler, luego aplicando el cambio de variable $x = e^t$, se obtiene la EDO con coeficientes constantes no homogénea (ver ítem (i))

$$y''(t) - y(t) = e^t + \cos(t), \quad (2)$$

que resolveremos a continuación.

a) RESOLVIENDO LA EDO HOMOGÉNEA ASOCIADA: $y''(t) - y(t) = 0$, (usando operadores sería $(D^2 - 1)y(t) = 0$) se tiene que la ecuación característica correspondiente es $\lambda^2 - \lambda = 0$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, de donde se concluye que la solución general de la homogénea es $y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$, siendo $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ constantes arbitrarias.

b) ENCONTRANDO UNA SOLUCIÓN PARTICULAR: Analizando la función del lado derecho de la EDO (2), se aprecia que un aniquilador (de más bajo orden) es $L_1 = (D - 1)(D^2 + 1)$, siendo $D := \frac{d}{dt}$. Luego, procediendo como corresponde, se deduce que una solución particular de (2) es de la forma

$$y_p(t) = A t e^t + B \cos(t) + C \sin(t),$$

donde A , B , y C son constantes reales a determinar (a este mismo resultado se llega aplicando el método de coeficientes indeterminados). De hecho, estas constantes deben ser tales que y_p satisfaga la ecuación (2), lo cual conduce a afirmar que

$$2Ae^t - 2B \cos(t) - 2C \sin(t) = e^t + \cos(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

De esta forma, se deduce que $A = 1/2$, $B = -1/2$, y $C = 0$, es decir que la solución particular buscada es $y_p(t) = \frac{1}{2}t e^t - \frac{1}{2} \cos(t)$.

c) USANDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, tenemos que la solución general de (2) es

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}t e^t - \frac{1}{2} \cos(t),$$

lo cual implica que la solución general de (1) sea

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + \frac{1}{2}x \ln(x) - \frac{1}{2} \cos(\ln(x)),$$

siendo $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ constantes arbitrarias.

d) RESOLVIENDO EL PVI FORMADO POR LA EDO (1) CON LAS CONDICIONES INICIALES $y(1) = y'(1) = 0$: En vista que conocemos la solución general de (1), procedemos a determinar C_1 y C_2 tales que se verifiquen las condiciones iniciales.

- De $y(1) = 0$, se desprende que $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$,
- De $y'(1) = 0$, se desprende que $C_1 - C_2 = -\frac{1}{2}$,

de donde resulta $C_1 = 0$, $C_2 = 1/2$. Finalmente, la solución del PVI dado es

$$y(x) = \frac{1}{2} x^{-1} + \frac{1}{2}x \ln(x) - \frac{1}{2} \cos(\ln(x)).$$

Problema 2. Resolver

$$\frac{1}{3}y(t) + \int_0^t \text{sen}(t-u) y(u) du = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ \text{sen}(t) & \text{si } \pi \leq t < 2\pi, \\ 0 & \text{si } 2\pi \leq t. \end{cases}$$

Expresa la solución $y(t)$ por tramos.

Pauta: Primero observamos que

$$\int_0^t \text{sen}(t-u) y(u) du = \text{sen}(t) * y(t),$$

y además que, denotando por $f(t)$ la función *fuentes* del lado derecho de la ecuación integral, se deduce que

$$f(t) = \text{sen}(t) \left(H_\pi(t) - H_{2\pi}(t) \right) = -\text{sen}(t - \pi) H_\pi(t) - \text{sen}(t - 2\pi) H_{2\pi}(t).$$

Luego, aplicando la transformada de Laplace, y usando propiedades adecuadas de ésta, resulta

$$\frac{1}{3} \mathcal{L}[y(t)](s) + \frac{\mathcal{L}(y(t))(s)}{s^2 + 1} = -\frac{1}{s^2 + 1} \left(e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} \right),$$

de donde se obtiene

$$\mathcal{L}[y(t)](s) = -\frac{3}{s^2 + 4} \left(e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} \right).$$

Aplicando ahora la transformada inversa de Laplace, y ocupando la SEGUNDA PROPIEDAD DE TRASLACIÓN, se tiene que

$$y(t) = g(t - \pi)H_\pi(t) + g(t - 2\pi)H_{2\pi}(t),$$

siendo $g(t) := \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{3}{s^2 + 4} \right] (t) = -\frac{3}{2}\text{sen}(2t)$. De esta forma, la solución viene dada por

$$y(t) = -\frac{3}{2}\text{sen}(2t)H_\pi(t) - \frac{3}{2}\text{sen}(2t)H_{2\pi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ -\frac{3}{2}\text{sen}(2t) & \text{si } \pi \leq t < 2\pi, \\ -3\text{sen}(2t) & \text{si } 2\pi \leq t. \end{cases}$$

Observación: intentar resolver la ecuación dada “analizando” cada tramo (y aplicando para cada tramo la transformada de Laplace) es incorrecto, puesto que la función en cuestión tiene que estar definida en $[0, +\infty)$ para (por lo menos) intentar calcular su transformada de Laplace.

Problema 3. Resuelva el siguiente sistema aplicando el método de valores y vectores propios.

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + e^t, \\ y'(t) = x(t) - y(t) + e^{-2t} \end{cases}$$

Pauta: La forma matricial del sistema de EDO puede escribirse como $X'(t) = AX(t) + B(t)$, siendo $X := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$.

Recordando el principio de superposición, la solución general de este sistema puede escribirse como $X(t) = X_H(t) + X_P(t)$, donde $X_H(t)$ denota la solución general de la ecuación homogénea asociada, y $X_P(t)$ es una solución particular del sistema original.

a) **Cálculo de $X_H(t)$:** calculando los valores propios de A , éstos son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) := |A - \lambda I| = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, es decir, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Los respectivos espacios propios asociados son:

$$S_{\lambda_1} = \langle \{(2, 1)^T\} \rangle, \quad S_{\lambda_2} = \langle \{(1, -1)^T\} \rangle.$$

Por lo tanto la base del espacio solución está conformado por

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la solución del sistema homogéneo está dado por

$$X_H(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix},$$

con C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.

b) **Cálculo de $X_P(t)$:** usaremos el método de variación de parámetros. Por esto, consideramos que $X_P(t) = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t)$, donde $C_1(t)$ y $C_2(t)$ se encuentran a partir de la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2e^t & e^{-2t} \\ e^t & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, multiplicando por la inversa de la matriz del sistema o aplicando la regla de Cramer, se tiene

$$\begin{aligned} C_1'(t) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} & \Rightarrow & C_1(t) = \frac{t}{3} - \frac{1}{9}e^{-3t}, \\ C_2'(t) &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{3t} & \Rightarrow & C_2(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}e^{3t}, \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene la solución particular

$$X_P(t) = C_1(t) X_1(t) + C_2(t) X_2(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^t - \frac{2}{9}(1 + 3t)e^{-2t} \\ \frac{1}{9}(3t - 1)e^t - \frac{1}{9}(1 - 6t)e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del sistema es

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^t - \frac{2}{9}(1 + 3t)e^{-2t} \\ \frac{1}{9}(3t - 1)e^t - \frac{1}{9}(1 - 6t)e^{-2t} \end{pmatrix},$$

siendo C_1 y C_2 constantes reales arbitrarias.