Agujeros Negros Cuánticos

14 de enero de 2021

Resumen

Notes escritas por Marcelo Oyarzo[1] de las clases del Profesor Gastón Giribet en el contexto de la Escuela de Verano de la Universidad de Concepción 2021: *Escuela de Agujeros Negros Clásicos y Cuánticos* (t.ly/0Tw1).

Índice

1. Introducción a la termodinámica de agujeros negros: entropía de Bekenstein, argumentos heurísticos, órdenes de magnitud

El nombre *Agujeros negros cuánticos* no es tan bueno porque no necesariamente estamos hablando del estado cuántico que describe a un agujero negro. Al final de las lectures discutiremos un poco de esto. Sin embargo, durante las tres primeras clases estaremos hablando de algo intermedio. Es decir, considerar efectos cuánticos en torno a una agujero negro que es tratado clásicamente.

Esta primera clase seguiremos argumentos heurísticos, un poco más refinado de como fue históricamente.

Comenzaremos con un agujero negro estático y esféricamente simétrico. La diferencia entre estacionario y estático es que en el caso estático el agujero negro está quieto. Mientras que en el caso estacionario el agujero negro puede rotar pero la métrica no depende del tiempo: rota siempre igual. Sin embargo, cuando rota se achata un poco, perdiendo así la simetría esférica.

En el caso estático y esfericamente simétrico, la métrica toma la forma

$$ds^2 = -f\left(r\right)dt^2 + \frac{dr^2}{g\left(r\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{1}$$

Podemos pensar esto como un ansatz para las ecuaciones de Einstein, donde vamos a motivar la forma que deberían tener las funciones libres. En muchos casos[2] en Relatividad General se da la igualdad

$$f\left(r\right) = g\left(r\right). \tag{2}$$

[1]moyarzoca1@gmail.com

[2]Con constante cosmológica, con un campo electromagnético, etc...

En el límite de campo débil la función $f(r)$ se relaciona con el potencial Newtoniano como

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + \frac{2\Phi}{c^2}, \\ &= 1 - \frac{2G}{c^2 r}\left(M + \int_0^r T_0{}^0(r)\, dV\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Donde $T_0{}^0$ es una de las componentes del tensor de Energía-Momentum de los campos presentes. Esto último no es más que decir que la masa y la energía son lo mismo, por lo que además de la masa hay que agregar toda la energía que hay bajo nuestros pies. En el caso del campo electromagnético, la energía eléctrica es

$$\varepsilon_{elect} = \int dV \left|\vec{E}\right|^2. \tag{4}$$

Si además hay energía oscura, la energía será dada por

$$\varepsilon_\Lambda = \int dV \frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{5}$$

Reemplazando en (3),

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \tag{6}$$

Esta es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica acoplada al campo electromagnético

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, & (7) \\ \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= 0. & (8) \end{aligned}$$

Observe que hemos intuido con un ansatz educado una solución a las ecuaciones no lineales, que son muy difíciles de resolver. Siempre hay que asegurarse *a posteriori* con un método más robusto que las ideas desarrolladas de forma heurístico son realmente así. Consideremos el agujero negro que solo tiene masa, es decir Schwarzschild. Podemos confiar de la solución (6) con $Q = 0 = \Lambda$ hasta que $f(r) = 0$. El punto donde se anula lo llamamos radio de Schwarzschild $f(R_S) = 0$.

La métrica de Schwarzschild sirve para modelar objeto esfericamente simétricos, por ejemplo el sol. Lejos del sol $T_{\mu\nu} = 0$ y es mas o menos redondo, por lo que se puede aproximar a una esfera. Sin embargo, en el interior del sol obviamente no es valido, ya que en este lugar hay un tensor de energía momentum no trivial. Si tenemos un objeto extremadamente denso, entonces no hay superficie porque la estrella colapsó gravitacionalmente y la superficie, de alguna manera, esta dentro del horizonte. Entonces un agujero negro corresponde solo la métrica de Schwarzschild, que es valida hasta $r = R_S$ donde pasa algo curioso, pues $g_{tt} \to 0$, que es como si el tiempo se detiene y $g_{rr} \to +\infty$. De forma heurística, la superficie a $r = R_S$ es el lugar donde la velocidad de escape es la velocidad de la luz

$$\frac{1}{2} mc^2 = \frac{GNm}{R_S} \qquad \to \qquad R_S = \frac{2MG}{c^2}. \tag{9}$$

Con estos mismo argumentos podemos preguntarnos cuál es la aceleración que debe tener un cuerpo en el horizonte para quedarse ahí,

$$m\frac{MG}{R_S^2} = m a_{\text{sup}} \qquad \to \qquad a_{\text{sup}} = \frac{c^4}{4MG} \tag{10}$$

Esto se conoce como gravedad superficial (surface gravity) y se denota por $\kappa = \frac{c^4}{4MG}$. De estos elementos nos vamos a valer para hablar de la entropía de los agujeros negros. Vamos a repasar brevemente los resultados asociados a agujeros negros que se conocía a fines de la decada del 60' y a comienzos de la decada del 70', para intuir que hay una analogía entre la termodinámica y las leyes de los agujeros negros.

1. Teorema del área en Relatividad General clásica (Hawking 1970): Si tenemos dos agujeros negros que colisiona, estos hacen un quilombo, generan ondas gravitacionales y todo culmina en un tercer agujero negro. Entonces el scattering de agujeros negros da lugar $M_1 + M_2 \to M_3 + ondas$. Entonces tenemos la desigualdad
$$M_1 + M_2 \geq M_3$$
Note que si elevamos al cuadrado esta ecuaciones obtenemos que $M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2 \geq M_3^2$, del término crusado es que se inspiró Hawking para mostrar que
$$M_1^2 + M_2^2 \leq M_3^2. \tag{11}$$
Esto se puede reescribir de otra forma considerando que $R_S = \frac{2GM}{c^2}$ y que Area $= 4\pi R^2$,
$$\text{Area}_1 + \text{Area}_2 \leq \text{Area}_3. \tag{12}$$
Es decir que el área siempre crece o se mantiene igual. No así la masa, pues la suma de los radios iniciales es mayor o igual que el radio final. Este es un teorema que se desprende la teoría misma.

2. Israel-Carter tenía una colección de resultados que apuntaban a hacer la unicidad de las soluciones de agujeros negros estacionarios. Para estos años ya se conocía la solución con masa, carga eléctrica y momento angular que es llamada solución de Kerr-Newman. Que es una generalización de la solucipon de Kerr, que a su vez es la generalización de la solución de Schwarzschild. Israel y Carter tenían muchos argumentos para decir que Kerr-Newman es la solución más general *estacionaria* de la Relatividad General. Estacionaria porque si perturbamos un agujero negro, ésta va a hacer cosas locas que dependen del tiempo y luego va a volver a ser estacionario exponencialmente.
Hoy en día se sabe que esto es así y se conoce como *teorema de no-hair*. Esto significa que un agujero negro es perfectamente liso. Si no rota es perfectamente esférico, mientras que si rota es oblondo pero totalmente liso.

3. Aquí aparece la pregunta que Wheeler hace a su estudiante Bekenstein. Este le dijo: mira que raro, considera que tienes una taza de té y un vaso de agua. ¿Cuál es la diferencia entre tirar la taza de té y después el vaso con agua al agujero negro con, mezclar la taza de té con el vaso de agua, lo cual aumenta la entropía, y luego lanzarlos al agujero negro? Aparentemente no hay diferencia, pues en ambos procesos el estado final va a ser un agujero negro un poquito más grande. Entonces ¿cómo se pueden diferenciar? Como puede ser que la entropía haya desaparecido ¿donde fué la entropía?
Esto le dio una idea a Bekenstein, el cual en este tiempo estaba en Princeton y había toda una discución respecto a una analogía entre la temrmodinámica y las leyes de los agujeros negros. Estas analogías le hicieron pensar a Bekenstein que los agujeros negros tenían una entropía intrínseca.

4. Analogías entre termodinámica y agujeros negros (Bordeen–Hawking–Carter). Las leyes termodinámicas tienen una análogo en los agujeros negros:

	Termo	BH
Principio 0	Si hay equilibrio término la temperatura de todos los cuerpos es la misma.	La surface gravity es la misma en cualquier punto del horizonte.
Primer principio	$dE = TdS - PdV$	$dMc^2 = \frac{\kappa}{2\pi} dArea + \dots$
Segundo principio	$dS > 0$	$dArea > 0$

Observe que en el segundo principio justo lo que estamos relacionado con la entropía en la primera ley es lo que siempre aumenta.

1.1. Entropía y temperatura de un agujero negro (Heurístico)

Podemos hacer una deducción heurística para calcular a entropía de un agujero negro. La idea es pensar la entropía en términos de información $S = -Ik_B$ donde I es una medida de información. La información la podemos codificarla en paquetes de onda con una cierta longitudes de ondas λ. Nos podemos preguntar por la mínima cantidad de información que puede absorber el agujero negro. Las longitudes de onda pequeñas de seguro entrarán, sin embargo no todas las longitudes de onda largas son absorbidas por el agujero negro. La longitud de onda más grande que se puede tragar es $\lambda \simeq 2R_S$, esta será la mínima información que podemos enviar: un bit. Vamos a llamar $\delta\varepsilon$ a la energía que absorbió el agujero negro por haberle lanzado el paquete de onda,

$$\delta\varepsilon = h\nu = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \tag{13}$$

La mínima energía que pierdo, es decir por bit será

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta bit} = \frac{\delta\varepsilon}{\delta I} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_{bit}} = \frac{2\pi\hbar c}{2R_S} = \frac{\pi\hbar c^3}{2GM}. \tag{14}$$

Por otra parte si consideramos $\delta\varepsilon = c^2\delta M$ vemos que

$$\frac{\delta M}{\delta I} = \frac{\pi\hbar c}{2GM}, \tag{15}$$

integramos para descubrir la información perdida,

$$\begin{aligned} I &= \int \delta I \qquad (16)\\ &= \left[\frac{\pi\hbar c}{2G}\right]^{-1} \int M\delta M, \\ &= \left[\frac{\pi\hbar c}{2G}\right]^{-1} \frac{M^2}{2}. \qquad (17) \end{aligned}$$

Lo que acabamos de calcular es la entropía,

$$\begin{aligned} S &= \frac{k_B G}{\pi\hbar c} M^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{c^3 k_B \left(4\pi R_s^2\right)}{\hbar G} \\ &= \frac{c^3 k_B Area}{\hbar G}. \qquad (18) \end{aligned}$$

Observe que el resultado es proporcional al área, tal como las analogías invitaban a pensar. Sin embargo, no podemos confiar mucho en los factores numéricos de este resultado, por ejemplo si lanzamos fotones habrá al menos un factor 2 debido a la polarización, que no consideramos. Entonces lo que podemos decir de este resultado es

$$S = \mathcal{O}(1) \frac{c^3 k_B Area}{\hbar G}. \tag{19}$$

Donde $\mathcal{O}(1)$ es un factor de orden 1 que hay que calcular. Hawking hizo el cálculo con cuidado y encontró que este factor es $1/4$. Algunas propiedades de la formula

$$S_{BH} = \frac{1}{4}\frac{c^3 k_B Area}{\hbar c} \tag{20}$$

son:

1. La entropía depende de las constantes más importantes de la física

   $$S = S(c, \hbar, G, k_B) \tag{21}$$

   En algún sentido esto lo que nos dice es que los agujeros negros deben tener la clave para entender una teoría unificada de la gravedad.

2. La entropía es proporcional al área y no al volumen. Esto no es sorprendente, pues pensemos en Relatividad General y un agujero negro. Podemos lanzar cosas a su interior y queremos calcular el tiempo que se demora en caer. Por ejemplo, lanzamos un rayo de luz y calculamos el tiempo que le tarda en llegar a R_S visto desde un observador externo. El fotón tendrá $ds^2 = 0 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}$, no escribimos $d\Omega$ porque cae radialmente. Entonces el tiempo que le toma al fotón llegar al horizonte es

   $$\Delta t = \int_0^{\Delta t} dt = \int_{r_i}^{R_s} \frac{dr}{f(r)} = \int_{r_i}^{R_s} \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} = \infty. \tag{22}$$

   Es decir, cualquier observador que esté fuera del agujero negro observa que al rayo de luz le toma un tiempo infinito llegar al horizonte. Consecuentemente la imagen de los objetos que lanzamos al agujero negro se van congelando y aplasta en su superficie. Toda la información que lanzamos va desapareciendo, pero de alguna manera sus grados de libertad están codificados sobre la superficie.
   El hecho de que es proporcional al área da tanta vuelta porque por ejemplo, en el caso de un gas ideal la entropía es proporcional al volumen. En el caso más simple, pensemos que tenemos N partículas de spin j, por lo que cada partícula puede estar en $2j+1$ estados. Un gas ideal es un gas muy licuado donde las partículas no interactúan entre sí, por lo que todos los grados de libertad del sistema completo será $\Omega = (2j+1)^N$. Luego la entropía será $S = k_B \ln \Omega = k_B N \ln(2j+1) \sim VOL$. En un agujero negro esto no se cumple obviamente porque no es un gas ideal, sino que es un sistema mucho más complicado. Pensemos en un taca taca (mete gol), que son más parecidos a un agujero negro que a otra cosa. Una vez que se caracteriza lo que pasa en su superficie (el ángulo y profundidad de cada manilla en el taca taca), queda unívocamente determinado lo que ocurre en su interior. Entonces no hay ningún problema que la entropía sea proporcional al área, al menos conceptualmente hablando. De hecho, sea como sea si tenemos un sistema que está lejos de ser un gas ideal y queremos reproducir la termodinámica a partir de una física estadística vamos a tener dos problemas: (i) El primero, es evidente, no tenemos una descripción microscópica de la gravedad. (ii) Si la tuviéramos estaríamos al inicio de un problema fuertemente acoplado que está muy lejano a ser un gas ideal.

3. $S \sim 1/\hbar$ por lo que la finitud de la entropía es un efecto cuántico. Esto tampoco es nuevo ni sorprendente, ya que hay muchos sistema en física que tienen esta propiedad.

4. $S \sim 1/G$ es un efecto no perturbativo en la constante de acoplamiento de la gravedad, que es la constante de Newton. Es un efecto que difícilmente se podrá ver si es que se tiene una teoría de la gravedad renormalizable, la cual estaría muy bien para hacer scattering de gravitones, pero para hacer cálculos no perturbativos (como este) sería muy difícil.

En este punto a Hawking había algo que no le cerraba. Si nos tomamos en serio el hecho que el agujero negro tiene energía $E = Mc^2$ y tiene una entropía, entonces ya no hay una mera analogía entre termodinámica y la mecánica de los agujeros negros. Consecuentemente, siguiendo la primera ley de la termodinámica, el agujero negro tiene que tener una temperatura.

$$\begin{aligned} dE &= TdS, \\ \rightarrow \quad d\left(Mc^2\right) &= T_H \left(\frac{c^3 k_B Area}{4\hbar G}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

De aquí podemos ver la temperatura

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}, \qquad \text{(Temperatura de Hawking)}, \tag{24}$$

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 Area}{4G\hbar}, \qquad \text{(Entropía de Bekenstein-Hawking)} \tag{25}$$

La temperatura de Hawking también tiene ciertas peculiaridades:

1. La temperatura es inversamente proporcional a la masa $T_H \sim 1/M \sim 1/E$ por lo que el calor especifico es
$$\frac{dE}{dT} = C_v < 0 \tag{26}$$
negativo. Hay otros sistemas que tienen calor especifico negativo pero son muy raros. Esto significa que a medida que va perdiendo energía, el sistema se calienta más.

2. Es un efecto cuántico $T_H \sim \hbar$.

3. La temperatura se puede escribir en términos de la gravedad de superficie κ como sigue
$$T = \frac{\kappa}{2\pi}\left(\frac{\hbar}{k_B c}\right). \tag{27}$$
Es decir que contra más grande sea la aceleración para dejar un cuerpo quieto en la superficie, mayor será la temperatura del agujero negro. Esto es interesante, ya que hay un fenómeno llamado proceso de Unruh, que asocia una temperatura a un observador acelerado. Si tenemos un observador en espacio plano con una aceleración constante propia $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2}$. El caso más sencillo de este escenario es el espacio de Rindler. El efecto Unruh muestra que un observador acelerado uniformemente en Minkowski ve una temperatura que es proporcional a su aceleración $T_H = \frac{a\hbar}{2\pi k_B c}$.

1.2. Ordenes de magnitud

Hoy en día vivimos en un época donde sabemos que existen los agujeros negros y sabemos que masas tienen. Observe que las formulas que hemos ido desarrollando dependen de las masa y de constantes cuyos valores son conocidos. Entonces nos podemos hacer una idea de cuales son sus temperaturas de Hawking para ciertos valores razonables de M. Las teorías aceptadas que explican la formación de agujeros negros como el colapso de estrellas, nos proporciona una cota inferior a la masa, la cual es $3M_{\odot}$. Pueden haber agujeros negros con menos masas solares pero su orgin es distinto: son llamados agujeros negros primordiales y fueron formados durante la expansión del universo. Por otra parte, los agujeros negros que de seguro existe son los que tienen millones de masa solares, pues los escuchamos con LIGO, los vemos en fotos, observamos la dinámica de las estrellas que lo circundan y las radiaciones que solo ellos la pueden explicar. Como la temperatura es inversamente proporcional a la masa, los más calientes serán los más pequeños $\sim 3M_{\odot}$

$$T|_{M_{\odot}} \simeq 2 \times 10^{-7} K \tag{28}$$

la temperatura del CMB es $T_{CMB} \simeq 2,7K$. Nos podemos preguntar ¿qué masa debe tener un agujero negro tal que la temperatura de Hawking sea igual a la temperatura de CMB? La masa del agujero negro debe ser $M_{BH} \simeq 7 \times 10^{22} Kg \simeq M_{\text{luna}}$, el radio de Schwarzschild sería del orden de los milimetros, muy pequeño!

Observación: No todos los agujeros negros son densos, ya que la densidad es dada por

$$\rho = \frac{M}{\text{vol}} \sim \frac{M}{R_S^3} \sim \frac{1}{M^2} \tag{29}$$

es decir que contra más masa tengan menos denso es, por ejemplo

M_{tierra}	$\rightarrow$	$R_s \sim 1cm$	Muy denso.
M_{sol}	$\rightarrow$	$R_s \sim 3km$	Muy denso.
$M_{\text{M87*}}$	$\rightarrow$	$R_s \sim R_{\text{sistema solar}}$	Poco denso. ¡Menos denso que el agua!

Ahora hablemos un poco de la entropía. Para ganar un poco de intuisión respecto a los ordenes de magnitud, comparemos la entropía del sol con la entropía de un agujero negro que tiene la masa del sol:

$$S_{\text{sol}} = 10^{35} \frac{J}{K}, \tag{30}$$

$$S^{\text{BH}}_{M_{\text{sol}}} = 10^{60} \frac{erg}{K} = 10^{53} \frac{J}{K}. \tag{31}$$

Entonces la entropía del agujero negro es 18 ordenes de magnitu más grande! $S_{BH} \sim 10^{18} S_{sol}$. Al igual como la tempratura de Hawking es extremadamente baja comparada con la temperatura de otros sistema, la entropía de Bekenstein es extremadamente grande respecto a otros sistemas. Y más vale que sea así, porque de lo contrario volveríamos a las paradojas iniciales: lanzamos cosas al agujero negro y pareciera que desaparece entropía, etc.

1.3. Bound de Bekenstein

De hecho hay una forma de implementar la idea de que un agujero negro debe ser *lo más entropico que hay*, esto es llamado el *Bound de Bekenstein*. Para ello consideremos un agujero negro y vamos a decir que es lo más entrópico que puede entrar en una bola de radio R. De modo que si le agregamos algo más debe ser más entropico que antes. Entonces la entropía S de cualquier cosa que esté contenida en un volumen igual tiene que ser menor o igual que una entropía máxima $S_{\text{máx}}$. Donde la entropía máxima es la que un agujero negro tendría en ese volumen,

$$\begin{aligned} S \leq S_{\text{máx}} &= \frac{4\pi R^2 k_B}{4\hbar G}, \\ &= \frac{\pi R k_B R c^3}{\hbar G}, \\ &= \frac{\pi \left(2MG\right) k_B R c^3}{\hbar c^2 G}, \\ &= \frac{2\pi k_B R E}{\hbar c}. \end{aligned} \tag{32}$$

Donde usamos $R = \frac{2MG}{c^2}$ y $E = Mc^2$. Ahora podemos dividir esto por la energía

$$\frac{S}{E} \leq \frac{S_{\text{máx}}}{E} = \frac{2\pi k_B R}{\hbar c} \tag{33}$$

Observe que el lado izquierdo no depende de G, es decir la cota anterior debe ser verdad incluso cuando no hay gravedad $G = 0$. Esto es un cota que proviene de los agujeros negros, pero es algo mucho más fundamental. Hoy en dia con cálculos más precisos se a mostrado que este bound es cierto.

1.4. Radiación de un agujero negro

Aun no hablamos de qué es lo que produce esta temperatura, sin embargo Hawking hizo el calculo preciso de la temperatura y además calculó la intensidad de esta radiación. Mostró que un *agujero negro es un cuerpo negro:* es máximamente absorbente y emite de forma térmica. Por esto el espectro está unívocamente determinado por la temperatura,

$$I^{(\omega)}_{intensidad} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^2}\left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T_H}} - 1}\right). \tag{34}$$

Esto es el espectro de Plack. Por lo tanto, sabemos cuanto emite por unidad de tiempo: emite con la ley de Stefan-Boltzmann

$$\text{Potencia} = \frac{dE}{dt} = \sigma T^4 Sup. \tag{35}$$

Entonces, ¿qué potencia tiene un agujero negro con la masa del sol? $P\left(M_{\text{Sol}}\right) \simeq 10^{-28}W$. Usando esta formula también podemos calcular el tiempo de evaporación,

$$dt = -\frac{1}{\sigma T^4 Sup} dE \qquad \rightarrow \qquad \Delta t = \int_0^{\Delta t} dt \sim -\int_{M_i}^0 M^2 dM < \infty$$

usando que $Sup \sim M^2$, $E \sim M$ y $T^4 \sim \frac{1}{M^4}$. El tiempo es finito! pero si reemplazamos las constantes para el agujero negro más pequeño $M \sim 3M_{\text{sol}}$ tenemos que $\Delta t \approx 10^{67}$años en evaporarse. Es decir 57 ordenes de magnitud más que la edad del universo.

Observe que hay algo interesante a notar: Si el agujero negro pierde masa debido a la radiación, y la masa a su vez es

$$E \sim M \sim R \sim \sqrt{A} \sim \sqrt{S_{BH}}$$

proporcional a la raíz de la entropía, por lo que disminuyo la entropía también. Esto parece violar el segundo principio de la termodinámica. Pero no! Porque el agujero negro no es un sistema cerrado. Aun no hablamos de qué general la radiación, pero la radiación tambien tiene una entropía, entonces $S = S_{BH} + S_{rad}$ es la que siempre aumenta.