

# Agujeros negros clásicos

14 de enero de 2021

## Resumen

Notas escritas por Marcelo Oyarzo<sup>1</sup> de las clases del Profesor Andrés Anabalón en el contexto de la Escuela de Verano de la Universidad de Concepción 2021 *Escuela de Agujeros Negros Clásicos y Cuánticos* ([t.ly/0Tfw1](https://t.ly/0Tfw1)).

## Índice

<b>1. Agujeros negros y su estructura causal</b>	<b>1</b>
1.1. Geodesica . . . . .	2
1.2. Simetrías y cargas conservadas . . . . .	3
1.3. Colapso esféricamente simétrico sin presión . . . . .	4
1.4. Extensión de Kruskal-Szekers . . . . .	7
1.5. Compactificaciones conformes . . . . .	9

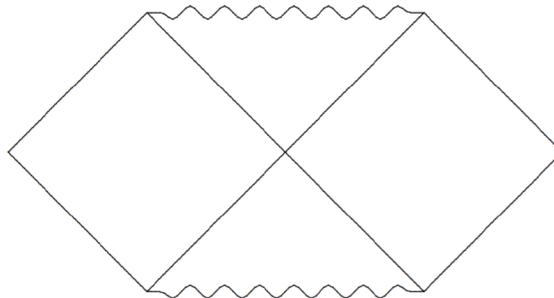
## 1. Agujeros negros y su estructura causal

¿Cuál es el espacio tiempo asociado a la métrica

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2?$$

En principio cualquier persona podría decir que es el plano, pero la pregunta no esta bien definida, pues aún no definimos el rango de las coordenadas. Por ejemplo si  $r \in [0, L]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$  la métrica anterior describe un disco, mientras que si cambiamos el rango de  $\phi \in [0, s]$  con  $s < 2\pi$  describe un cono.

El objetivo de esta clase es poder mostrar que la representación de la métrica de Schwarzschild es



Esta parte de las notas están basadas en las notas de Townsend: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012>

---

<sup>1</sup>moyarzoca1@gmail.com

## 1.1. Geodesica

La geodésica es una curva que tiene la distancia más corta entre dos puntos. Si pensamos en una partícula libre masiva, la geodésica se obtiene minimizando el tiempo propio,

$$I[x] = -mc^2 \int_A^B d\tau. \quad (1)$$

Donde el tiempo propio, por definición es el tiempo medido por un observado comovil con la partícula, que se puede escribir en términos de una parametrización arbitraria  $x^\mu(\lambda)$

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}} = \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}} d\lambda \quad (2)$$

donde  $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ . Consecuentemente la acción se puede escribir como

$$I[x] = -mc^2 \int_A^B \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}} d\lambda.$$

donde hemos considerado  $c = 1$ . La línea de mundo que satisface  $\frac{\delta I}{\delta x^\mu(\lambda)} = 0$  es una geodésica por definición. Una acción equivalente se puede escribir en términos de un *einbein*  $e$ , que es una nueva función independiente, que permite escribir la acción de una forma cuadrática en  $x$ ,

$$I[x, e] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda [e^{-1}(\lambda) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} - m^2 e(\lambda)]. \quad (3)$$

Observe que escribir la acción en términos del einbein nos permite tomar el límite  $m \rightarrow 0$ .

**Demstración de la equivalencia:** Para  $m \neq 0$  la ecuación de movimiento para el einbein es dada por extremar la acción  $\delta_e I \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} \delta_e I &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda [-e^{-2} \delta e \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} - m^2 \delta e], \\ &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \delta e [-e^{-2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} - m^2] \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

Dado que la variación  $\delta e$  es arbitraria se debe cumplir que

$$-e^{-2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} - m^2 = 0, \quad \implies \quad e = \frac{1}{m} \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{m} \frac{d\tau}{d\lambda}. \quad (4)$$

Haciendo casi lo mismo se pueden obtener las ecuaciones de movimiento para  $x^\mu$ ,

$$\delta_x I = 0 \quad \implies \quad D_{(\lambda)} \dot{x}^\mu = (e^{-1} \dot{e}) \dot{x}^\mu, \quad (5)$$

Donde hemos definido la derivada covariante respecto al parámetro  $\lambda$  de un vector  $V^\mu(\lambda)$  como

$$D_{(\lambda)} V^\mu := \dot{V}^\mu + \dot{x}^\nu \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho \nu \end{matrix} \right\} V^\rho. \quad (6)$$

Observe que la ecuación de la geodésica que se resuelve usualmente tiene el lado izquierdo de (5) igual a cero. Esto se logra siempre que  $e = cte$  es decir que  $\frac{d\tau}{d\lambda} = cte$ . Cuando esto ocurre, se dice que *la parametrización es afín*. Osea que el parámetro que recorre la curva  $\lambda$  es proporcional al tiempo propio. Observe que la ambigüedad en la elección del parámetro  $\lambda$  fue cedida a la elección de la función  $e$ .

De forma de general, para cualquier campo vectorial definido en la curva  $V^\mu(x(\lambda))$  se tiene que

$$\begin{aligned} X^\mu \nabla_\mu V^\nu &= X^\mu \partial_\mu V^\nu + X^\mu \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \rho \end{matrix} \right\} V^\rho, \\ &= \dot{V}^\mu + \dot{x}^\mu \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \rho \end{matrix} \right\} V^\rho \\ &= D_{(\lambda)} V^\nu. \end{aligned}$$

Donde  $X^\mu = \dot{x}^\mu$  lo definimos como el vector tangente a la curva. Para los campos vectoriales  $V^\mu$  que cumplen

$$D_{(\lambda)} V^\nu = f(\lambda) V^\nu, \quad (7)$$

donde  $f(\lambda)$  es arbitrario, se dice que es transportado paralelamente a lo largo de la curva. Por lo tanto, una geodésica es una curva cuyo vector tangente es transportado paralelamente a lo largo de ella misma.

Como último comentario respecto a las líneas de mundo de partículas, podemos notar que con  $m = 0$  la acción se reduce a

$$I[x, e] = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}, \quad (8)$$

la variación con respecto al einbein

$$\delta_e I = \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \delta e \left[ -e^{-2} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} = ds^2 = 0. \quad (9)$$

## 1.2. Simetrías y cargas conservadas

Pensando en el teorema de Noether, si tomamos la acción y hacemos una transformación de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - \alpha k^\mu, \quad e \rightarrow e \quad (10)$$

el cambio de la acción es dada por

$$\begin{aligned} I[x, e] \rightarrow I[x, e] &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \left[ e^{-1} \frac{d}{d\lambda} (x^\mu - \alpha k^\mu) \frac{d}{d\lambda} (x^\nu - \alpha k^\nu) g_{\mu\nu} (x - \alpha k) - m^2 e \right], \\ &= \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \left[ e^{-1} \left( \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \alpha \dot{k}^\mu \dot{x}^\nu - \alpha \dot{x}^\mu \dot{k}^\nu \right) (g_{\mu\nu} - \alpha k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu}) - m^2 e \right] + \mathcal{O}(\alpha^2), \\ &= I[x, e] + \frac{1}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \left[ -2e^{-1} \alpha \dot{k}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu} - \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \alpha k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2). \end{aligned}$$

Entonces la variación de la acción va como

$$\begin{aligned} \delta I[x, e] &= -\frac{\alpha}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu \left( \partial_\rho k^\mu g_{\mu\nu} + \partial_\nu k^\mu g_{\mu\rho} + k^\mu \partial_\mu g_{\rho\nu} \right), \\ &= -\frac{\alpha}{2} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda e^{-1} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu (\mathcal{L}_k g)_{\rho\nu}, \end{aligned}$$

Donde hemos definido la derivada de Lie para un tensor como

$$\mathcal{L}_k g_{\rho\nu} := \partial_\rho k^\mu g_{\mu\nu} + \partial_\nu k^\mu g_{\mu\rho} + k^\mu \partial_\mu g_{\rho\nu}.$$

La acción es invariante cuando

$$\mathcal{L}_k g_{\rho\nu} = 0.$$

Los vectores  $k = k^\mu \partial_\mu$  que cumplen con esta propiedad son llamados *vectores de Killing*.

Entonces por cada vector de Killing que tengamos, via teorema de Noether existe una cantidad conservada que es dada por

$$Q = k^\mu p_\mu.$$

donde  $p_\mu$  es el cuadri-momentum de la partícula

$$\begin{aligned} p_\mu & : = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}, \\ & = e^{-1} \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}, \\ & = m \frac{dx^\nu}{d\tau} g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 1** Muestre que usando las ecuaciones de movimiento y el hecho que  $k^\mu$  es un vector de Killing muestre que

$$\frac{dQ}{d\lambda} = 0.$$

Para el caso de un espacio tiempo que tenga métrica

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

que puede ser Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, etc. Siempre hay un vector de Killing  $k = \partial_t$ . De modo que la cantidad conservada es

$$mk^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} g_{\mu\nu} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} g_{\mu 0} = m \frac{dt}{d\tau} g_{00} = -m\varepsilon \quad (11)$$

donde  $\varepsilon$  es la densidad de energía (energía/unidad de masa).

### 1.3. Colapso esféricamente simétrico sin presión

Ahora podemos estudiar como se mueve una partícula en un background, por ejemplo Schwarzschild. Podemos pensar en un colapso de una hipotética nube de polvo esféricamente simétrica con presión cero que colapsa en un agujero negro. Dicha métrica con  $c = 1$  y  $G = 1$  es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (12)$$

Si consideramos  $r = R(t)$ , pensemos en una partícula que está parada sobre la superficie de la estrella. Podemos escribirla como

$$ds^2 = - \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{R}^2 \right] dt^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

Para una partícula libre que cae radialmente junto con la estrella que colapsa tenemos que  $d\Omega^2 = 0$  y  $ds^2 = -d\tau^2$  entonces,

$$1 = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{R}^2 \right] \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (14)$$

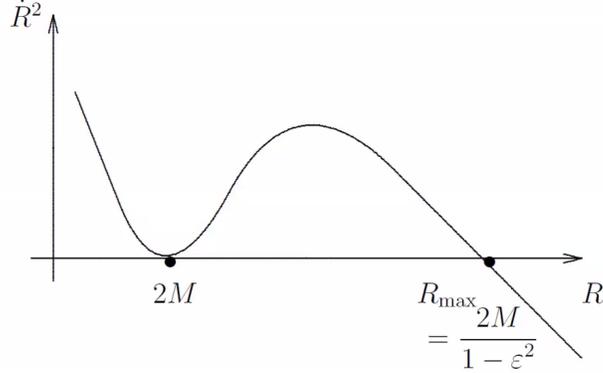
Pero la cantidad  $\frac{dt}{d\tau}$  aparece en el cálculo de la cantidad conservada asociada a traslaciones temporales en (11). Para el caso de Schwarzschild  $\varepsilon = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \frac{dt}{d\tau}$ , entonces

$$1 = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{R}^2 \right] \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-2} \varepsilon^2, \quad (15)$$

Que finalmente da lugar a una ecuación para  $\dot{R}^2$ ,

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^2 \left(\frac{2M}{R} - 1 + \varepsilon^2\right). \quad (16)$$

Note que para el caso en que la densidad de energía de la partícula  $\varepsilon^2 \geq 1$  entonces  $\dot{R}^2 > 0$ , es decir  $\dot{R}$  nunca se anula, por lo que no hay puntos de retorno en la orbita, por lo que escapa a infinito. Mientras que las partículas con densidad de energía  $\varepsilon^2 < 1$  existen puntos de retornos en las orbitas,  $\dot{R} = 0$ . Por lo que estamos interesados en considerar el segundo caso, cuyo gráfico es



Note que la estrella comienza con cierto radio máximos  $R_{\max} > 2M$  y luego comienza a acelerar hasta llegar a punto en donde el borde de la estrella deja de acelerar y luego su velocidad disminuye hasta aproximarse a cero! De cierta forma el borde de la estrella se ralentiza cuando se acerca a  $2M$ , pero nunca lo toca. Esto es visto por un observado que está mirando el colapso desde el exterior.

Por otra parte un observador que está cayendo con la estrella en colapso tiene un tiempo propio  $\tau$  distinto al tiempo  $t$  del tiempo en infinito. En este caso

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \frac{d}{d\tau}.$$

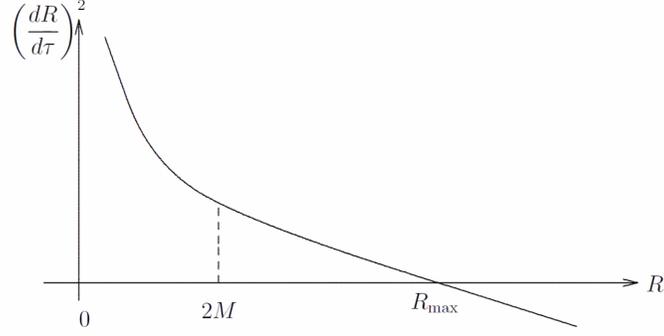
Entonces si escribimos la derivada de  $\dot{R}$  en términos de  $\frac{dR}{d\tau}$  pasa algo curioso, y es que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^2 \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^2 \left(\frac{2M}{R} - 1 + \varepsilon^2\right)$$

El término que llevaba a que  $\dot{R}$  se anule en  $2M$  se cancela!

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{2M}{R} - 1 + \varepsilon^2\right) = (1 - \varepsilon^2) \left(\frac{R_{\max}}{R} - 1\right)$$

De modo que ahora el observado atraviesa  $R = 2M$



Esta idea de que existen observadores que pueden atravesar la superficie  $r = 2M$  hace aparecer nuevas preguntas respecto a como se podría explorar el espacio tiempo mas allá de  $r = 2M$ . Sin embargo, esta búsqueda parece no tener sentido, ya que si tenemos cierta región del espacio es natural pensar que hacer un cambio de coordenadas va a dar lugar al mismo espacio, pues debemos respetar los rangos de las nuevas coordenadas respecto a las antiguas. La clave para dar sentido a esto es considerar un “cambio de coordenadas” pero permitir que el rango de las nuevas coordenadas se extiendan más allá que las antiguas. Esto es llamado un *difeomorfismo* y las Relatividad General es invariante bajo difeomorfismos.

Clásicamente nada extraño ocurre en  $r = 2M$ , por lo que es interesante estudiar cómo caen las partículas sin masa hacia  $r = 2M$ . En este caso, si la partícula cae de forma radial  $d\Omega^2 = 0$  y  $ds^2 = 0$ , de modo que

$$dt^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} dr^2 \equiv (dr^*)^2$$

podemos escribir la coordenada  $r^*$ ,

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$$

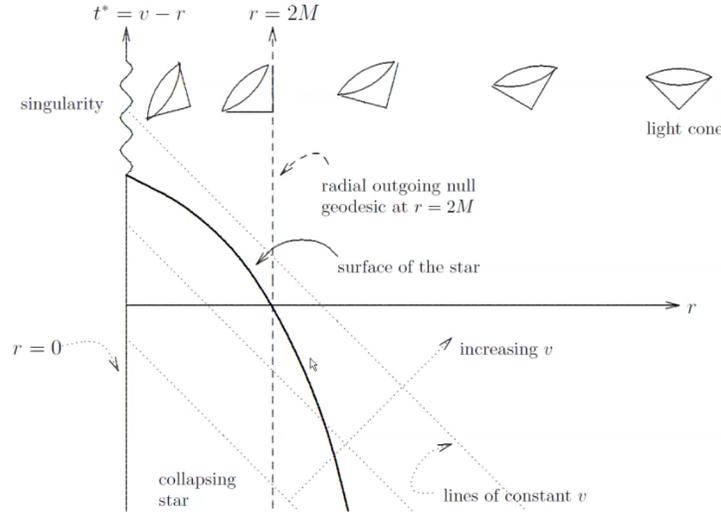
Definiendo las coordenadas ingoing  $v = t + r^*$

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2, \\ &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

La nueva métrica con coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  permite  $r > 0$ , pues la métrica no explota en  $r = 2M$ . Observe además que la superficie  $r = 2M$  es una membrana unidireccional, para mostrar esto reescribamos la métrica como

$$2drdv = -\left[-ds^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dv^2 + r^2 d\Omega^2\right]. \quad (17)$$

Para una curva tipo tiempo  $-ds^2 > 0$  y para  $r < 2M$ , vemos que del lado izquierdo de la ecuación anterior  $2drdv < 0$  y si el observado esta orientado hacia el futuro,  $dv > 0$ , entonces  $dr$  no puede ser positivo. Es decir, está condenando a moverse hacia donde  $r$  disminuye.



En el diagrama anterior, que se construye siguiendo las geodésicas nulas, se observa que los conos de luz del observado que cae siempre queda apuntando hacia el interior de  $r = 2M$ .

Un agujero negro que se creó mediante un colapso gravitacional no es invariante bajo el cambio  $t \rightarrow -t$ , pues el paso es distinto al futuro. Sin embargo, las ecuaciones de Einstein admiten soluciones que son agujeros negros eternos que han estado desde siempre, y estos sí son invariantes bajo una inversión temporal. Siguiendo esta idea existe otra posible extensión al parche de Schwarzschild, el cual se puede lograr considerando las coordenadas outgoing

$$u = t - r^*, \quad -\infty < u < \infty.$$

En este caso la métrica se puede poner la siguiente forma,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2drdu + r^2 d\Omega^2.$$

Podemos hacer el mismo análisis anterior y estudiar que tipo de superficie es  $r = 2M$ . Note que

$$2drdv = -\left[-ds^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dv^2 + r^2 d\Omega^2\right] \leq 0.$$

Siguiendo los mismos argumentos anteriores, pero en este caso  $2drdv \leq 0$ , por lo que  $dr > 0$ . De modo que el observador está saliendo del interior de  $r = 2M$ . Esto se puede interpretar como la versión con tiempo invertido de un agujero negro eterno.

#### 1.4. Extensión de Kruskal-Szekers

¿Será posible extender aun más el espacio para dilucidar nuevas regiones, o bien encontrar un parche donde estén todas las regiones que hemos estudiado juntas? La respuesta es que sí, considerando el siguiente difeomorfismo

$$U = -e^{-u/4M}, \quad V = e^{v/4M}. \quad (18)$$

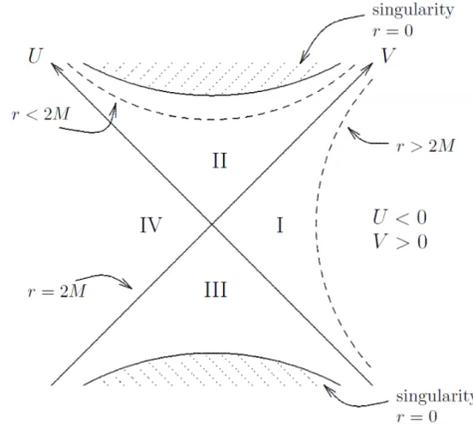
note que como  $u, v \in \mathbb{R}$ , entonces si estuviéramos pensando en un cambio de coordenadas  $U < 0$  y  $V > 0$ . Sin embargo, para poder extender el parche coordenado debemos considerar que las nuevas coordenadas tengan los siguientes rangos:  $U \in \mathbb{R}$  y  $V \in \mathbb{R}$ . En tal caso la métrica toma la forma siguiente

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2. \text{Obser} \quad (19)$$

Note que (18) podemos escribir

$$UV = - \left( \frac{r - 2M}{2M} \right) e^{r/2M}. \quad (20)$$

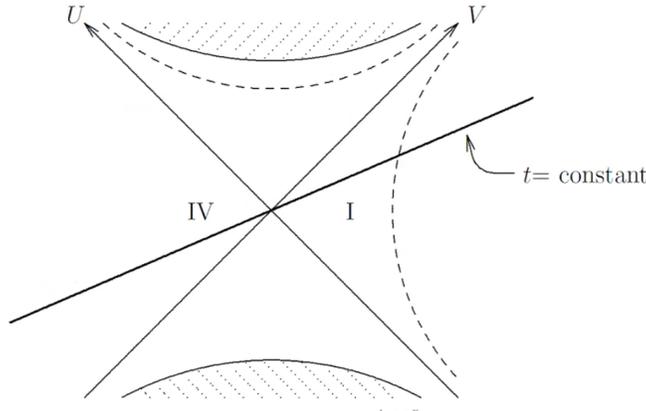
Observe que cada valor de  $r = cte$  corresponde a una hipérbola en el espacio tiempo. Esto da lugar al diagrama siguiente



Observe que en este nuevo parche se pueden ver 4 regiones. Por otra parte si consideramos

$$\frac{U}{V} = e^{-t/2M} \quad (21)$$

Es decir, las superficie a  $t = cte$  son líneas rectas en el espacio tiempo, note que el cambio  $(U, V) \rightarrow (-U, -V)$  es una isometría de la métrica, por lo que la región I es isométrica a las región IV.



Para investigar la región IV, como apreciamos que las líneas a  $t = cte$  son líneas rectas que conectan las región I y IV, podemos intentar pasar de una a la otra haciendo otro difeomorfismo,

$$r = \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2 \rho \quad (22)$$

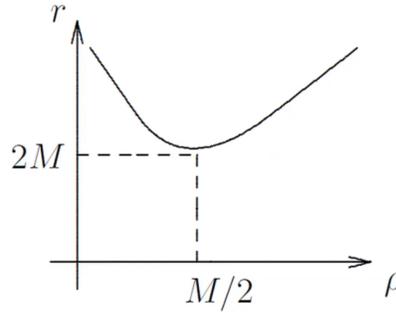
En este caso la métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{M}{2\rho}}{1 + \frac{M}{2\rho}} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 \underbrace{(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)}_{\text{espacio plano}}. \quad (23)$$

Observe que cuando  $\rho \rightarrow +\infty$  y  $\rho \rightarrow 0$  la métrica va a Mikowski

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow +\infty} ds^2 &= -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2, \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} ds^2 &= -dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)\end{aligned}$$

Note además que para cada valor de  $r$  hay dos valores de  $\rho$



hay un mínimos en  $\rho = M/2$ , que corresponde a  $r = 2M$ .

Pero note que cuando  $\rho \rightarrow M/2$  se anula  $g_{tt}$ , por lo que se dice que en estas coordenadas podemos conectar dos regiones asintóticas que son Mikowski pero no podemos atravesarlo. Esto se conoce como un agujero de gusano no atravesable.

## 1.5. Compactificaciones conformes

Las compactificaciones conformes toman un espaciotiempo que en principio es no compacto y hacerlo compacto. De modo que toma puntos que están en infinito y los lleva a valores finitos. A continuación vamos a hacer compactificaciones conformes de distintos espacios.

Comenzaremos tomando la métrica del plano  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$  y la vamos a multiplicar por un factor conforme

$$d\tilde{s}^2 = \Lambda^2 ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{(1 + r^2)^2}. \quad (24)$$

donde

$$\Lambda = \frac{2}{(1 + r^2)}.$$

Ahora la métrica  $d\tilde{s}^2$  es la métrica de la esfera  $S^2$ .

**Ejercicio 2** *Un ejercicio interesante es encontrar la transformación de coordenadas  $r = r(\theta, \varphi)$ ,  $\phi = \phi(\theta, \varphi)$  que llevan a las coordenadas usuales de la esfera.*

Lo que ocurrió fue que tomamos un espacio no compacto, lo multiplicamos por una función y dio lugar a un espacio compacto. Observe que en el caso Lorentziano si es que  $ds^2 > 0$  entonces  $d\tilde{s}^2 > 0$ , si  $ds^2 < 0$  entonces  $d\tilde{s}^2 < 0$  y si  $ds^2 = 0$  entonces  $d\tilde{s}^2 = 0$ , por lo tanto multiplicar por factores conformes no cambia la estructura causal del espacio tiempo; por eso es interesante estudiarlos.

Otro ejemplo es el espacio de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (25)$$

si nos pasamos a las coordenadas dobles nulas,

$$\begin{aligned} u &= t - r, \\ v &= t + r. \end{aligned} \quad (26)$$

La métrica queda

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt - dr)(dt + dr) + r^2 d\Omega^2 \\ &= -dudv + \frac{(u - v)^2}{4} d\Omega^2. \end{aligned} \quad (27)$$

luego si hacemos el siguiente *cambio de coordenadas*

$$\begin{aligned} u &= \tan \tilde{U}, & -\pi/2 < \tilde{U} < \pi/2, \\ v &= \tan \tilde{V}, & -\pi/2 < \tilde{V} < \pi/2. \end{aligned}$$

Note que ahora el rango de las coordenadas es un intervalo acotado (pero abierto). La métrica toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\sec^2 \tilde{U} \sec^2 \tilde{V} d\tilde{U} d\tilde{V} + \frac{1}{4} (\tan \tilde{U} - \tan \tilde{V})^2 d\Omega^2, \\ &= \left(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}\right)^{-2} \left[-4d\tilde{U} d\tilde{V} + \sin^2 (\tilde{U} - \tilde{V}) d\Omega^2\right]. \end{aligned} \quad (28)$$

La gracia de este cambio es que se factorizó la cantidad que explota en  $\tilde{U}, \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}$ . Por lo que ahora podemos multiplicar por el factor conforme  $\Lambda^2 = \left(2 \cos \tilde{U} \cos \tilde{V}\right)^2$  y la métrica quedará

$$d\tilde{s}^2 = -4d\tilde{U} d\tilde{V} + \sin^2 (\tilde{U} - \tilde{V}) d\Omega^2. \quad (29)$$

Ahora sí podemos cerrar los intervalos de las coordenadas  $\tilde{U}, \tilde{V} \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Observe que en el primer difeomorfismo que hicimos tenemos que  $r = \frac{1}{2}(v - u) > 0$  lo cual implica que  $\tilde{V} \geq \tilde{U}$ . De esta forma obtenemos cuatro regiones asintóticas,

$\left( \begin{array}{l} \tilde{U} = -\pi/2 \\ \tilde{V} = +\pi/2 \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} u \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow +\infty \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} r \rightarrow +\infty \\ t \text{ finito} \end{array} \right)$	infinito espacial $i_0$
$\left( \begin{array}{l} \tilde{U} = \pm\pi/2 \\ \tilde{V} = \pm\pi/2 \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} u \rightarrow \pm\infty \\ v \rightarrow \pm\infty \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} r \text{ finito} \\ t \rightarrow \pm\infty \end{array} \right)$	futuro (+) y pasado (-) $\infty$ temporal $i_{\pm}$
$\left( \begin{array}{l} \tilde{U} = -\pi/2 \\  \tilde{V}  \neq +\pi/2 \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} u \rightarrow -\infty \\ v \text{ finito} \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} r \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \\ r + t \text{ finito} \end{array} \right)$	Pasado nulo $\infty$ $\mathfrak{S}^-$
$\left( \begin{array}{l}  \tilde{U}  \neq \pi/2 \\ \tilde{V} = \pi/2 \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} u \text{ finito} \\ v \rightarrow +\infty \end{array} \right)$	$\Leftrightarrow$	$\left( \begin{array}{l} r \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \\ r - t \text{ finito} \end{array} \right)$	futuro nulo $\infty$ $\mathfrak{S}^+$

Para construir el diagrama de Penrose consideremos el *cambio de coordenadas*

$$\tau = \tilde{V} + \tilde{U}, \quad \chi = \tilde{V} - \tilde{U}.$$

En tal caso la métrica queda,

$$d\tilde{s}^2 = -d\tau^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega. \quad (30)$$

Este es llamado el universo de estático de Einstein con  $\chi \in [0, \pi]$  y  $\tau \in [-\pi, \pi]$  donde hemos mapeado los rangos de las coordenadas antiguas a las nuevas.

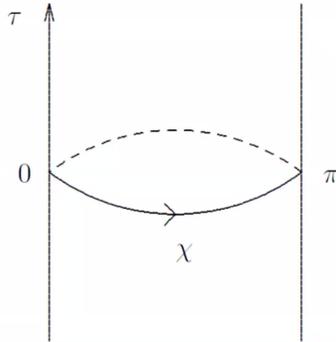
Si uno hace este mismo ejercicio en *AdS* es posible notar que  $\chi \in [0, \pi/2]$ . Por lo que se dice que el espacio estático de Einstein son dos copias de la compactificación conforme de *AdS*.

**Ejercicio 3 (Compactificación conforme de AdS)** *Reliazar la compactificación conforme de AdS en coordenadas globales*

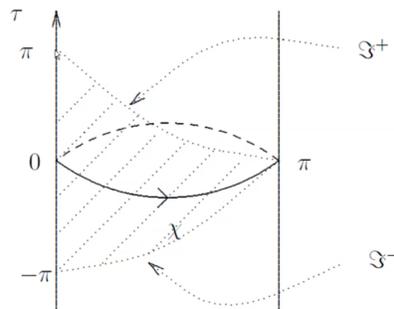
$$ds^2 = \ell^2(d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\tau^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (31)$$

donde  $\phi \in [0, 2\pi[$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $-\infty < \tau < +\infty$ . *Hint: Considere la transformación de coordenadas  $dq = d\rho / \cosh \rho$  o  $\cosh \rho = 1 / \cos q$ .*

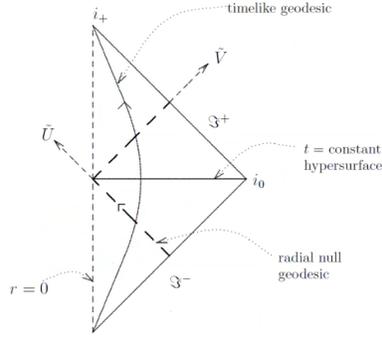
Si tomamos (30) y hacemos un diagrama  $(\tau, \chi)$



entonces para cada  $(\tau, \chi)$  hay una 2-esfera. Si queremos dibujar el futuro nulo  $\mathfrak{S}^+$  debemos considerar  $\tilde{V} = \frac{\pi}{2}$  y  $\tilde{U} \neq \frac{\pi}{2}$ , lo cual da lugar  $\tau = \pi - \chi$ , que es una recta en el espacio  $(\tau, \chi)$ . Mientras que para  $\mathfrak{S}^-$  debemos considerar  $\tilde{U} = -\frac{\pi}{2}$ , que da lugar a  $\tau - \chi = -\pi$ . Lo cual da lugar a



Si aplastamos el diagrama obtenemos el diagrama de Penrose de Minkowski



Por lo que la compactificación conforme de Minkowski es un triángulo.

Otro ejemplo interesante es considerar el espacio de Rindler en 2 dimensiones,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + dx^2 \\ &= -dU'dV' \end{aligned} \quad (32)$$

donde consideramos  $U' = t - x$  y  $V' = t + x$ , observe que ahora no hay restricción sobre  $x$ , por lo que el rango de las coordenadas compactas dará lugar a un cuadrado en vez que a un triángulo.

$$U' = \tan \tilde{U}, \quad -\pi/2 < \tilde{U} < \pi/2 \quad (33)$$

$$V' = \tan \tilde{V}, \quad -\pi/2 < \tilde{V} < \pi/2 \quad (34)$$

Con estas coordenadas la métrica toma la forma simple

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(\cos \tilde{U} \cos \tilde{V}\right)^{-2} d\tilde{U}d\tilde{V}, \\ &= \Lambda^{-2} d\tilde{s}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Multiplicamos por el factor conforma adecuado y cerramos los intervalos de las coordenadas  $\tilde{U}, \tilde{V} \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{U}d\tilde{V}. \quad (36)$$

Observe que la compactificación de Rindler en 2D es el mismo pero con los rangos de las coordenadas cambiados!

**Ejercicio 4 (Kruskal Manifold)** Consideremos Schwarzschild en coordenadas dobles nulas (ingoing y outgoing)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (37)$$

y considerando el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= \tan \tilde{U}, & -\pi/2 < \tilde{U} < \pi/2, \\ v &= \tan \tilde{V}, & -\pi/2 < \tilde{V} < \pi/2. \end{aligned} \quad (38)$$

El diagrama de Penrose será

