UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 6 ECUACIONES DIFERENCIALES

INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Lu 21/11/11

(1) Resuelva la ecuación diferencial : $y'' + y = 4\,x + cos(x)$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + y = 0$$

La ecuación polinomial asociada es $r^2 + 1 = 0$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = i \\ r_2 = -i \end{cases}$$

$$y_h(x) = c_1\,cos(x) + c_2\,sen(x)$$

Obtengamos ahora una solución particular para la ecuación diferencial

$$y'' + y = 4\,x$$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados.

$$y_p(x) = A + B\,x$$

$$y_p{}'(x) = B$$

$$y_p{}''(x) = 0$$

Luego, al reemplazar en la ecuación diferencial $y'' + y = 4\,x$, se tiene que

$$0 + A + B\,x \equiv 4x \Rightarrow B = 4\,,\ A = 0$$

Por lo tanto, para la ecuación diferencial $y'' + y = 4\,x$ la solución particular es $y_{p1}(x) = 4x$

Obtengamos en segundo lugar una solución particular para la ecuación diferencial $y'' + y = cos(x)$

Usemos el método de los coeficientes indeterminados.

$$y_p(x) = A\,cos(x) + B\ sen(x)$$

$$y_p{}'(x) = -A\,sen(x) + B\,cos(x)$$

$$y_p{}''(x) = -A\,cos(x) - B\,sen(x)$$

Luego, al reemplazar en la ecuación diferencial $y'' + y = cos(x)$, se tiene que

$$-A\,cos(x) - B\,sen(x) + A\,cos(x) + B\ sen(x) \equiv cos(x) \Rightarrow 0 = cos(x)$$

Lo anterior nos muestra que la solución particular considerada no sirve, por lo tanto debemos modificarla. (Notemos que $g(x) = cos(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada).

Consideremos ahora la solución particular

$$y_p(x) = (A + Bx)\,cos(x) + (C + Dx)\,sen(x)$$
$$y_p{}'(x) = B\,cos(x) - (A + Bx)\,sen(x) + D\,sen(x) + (C + Dx)\,cos(x)$$
$$y_p{}''(x) = -Bsen(x) - B\,sen(x) - (A + Bx)\,cos(x) + D\,cos(x) + D\,cos(x) - (C + Dx)\,sen(x)$$

Luego, al reemplazar en la ecuación diferencial $y'' + y = cos(x)$, se tiene que

$$-2Bsen(x) - (A + Bx)\,cos(x) + 2D\,cos(x) - (C + Dx)\,sen(x) + (A + Bx)\,cos(x) + (C + Dx)\,sen(x) \equiv cos(x) \Rightarrow$$

$$-2Bsen(x) + 2D\,cos(x) \equiv cos(x) \Rightarrow B = 0\,,\ 2D = 1 \Rightarrow B = 0\,,\ D = \frac{1}{2}$$

Dado que A y C pueden tomar cualquier valor real, lo anterior muestra que una solución particular puede ser $y_{p2} = \frac{1}{2}x\,sen(x)$, considerando $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ y $D = \frac{1}{2}$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 4\,x + cos(x)$$

es

$$y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + 4x + \tfrac{1}{2} x\, sen(x) \quad \square$$

(2) Utilizando el método de variación de parámetros resuelva la EDO

$$y'' + 4\,y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2+1}$$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>
Resolvamos la ecuación diferencial homogénea asociada.

$$y'' + 4\,y' + 4y = 0$$

La ecuación polinomial asociada es $r^2 + 4r + 4 = 0$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

Luego la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1\, e^{-2x} + c_2\, x\, e^{-2x}$$

Notamos que $y_1(x) = e^{-2x}$ y $y_2(x) = x\, e^{-2x}$, y la solución particular buscada es de la forma $y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$

Calculemos la matriz wronskiana

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2x} & x\, e^{-2x} \\ -2\, e^{-2x} & e^{-2x} - x\, e^{-2x} \end{bmatrix}$$

Luego $|\, W\,| = \begin{vmatrix} e^{-2x} & x\, e^{-2x} \\ -2\, e^{-2x} & e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2x\, e^{-4x} + 2x\, e^{-4x} = e^{-4x}$

Resolvamos el sistema

$$W \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2x}}{x^2+1} \end{bmatrix}$$

usando el Método de Cramer.

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\, e^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{x^2+1} & e^{-2x} - x\, e^{-2x} \end{vmatrix}}{e^{-4x}} = -\frac{x\, e^{-4x}}{(x^2+1)\, e^{-4x}} = -\frac{x}{(x^2+1)} \Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{2}\, ln(x^2+1)$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2\,e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{x^2+1} \end{vmatrix}}{e^{-4x}} = \frac{e^{-4x}}{(x^2+1)\,e^{-4x}} = \frac{1}{(x^2+1)} \Rightarrow c_2(x) = Arctg(x)$$

Finalmente la solución de la ecuación diferencial $y'' + 4\,y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2+1}$ es

$$y(x) = c_1\,e^{-2x} + c_2\,x\,e^{-2x} - \tfrac{1}{2}\,ln(x^2+1)\,e^{-2x} + x\,Arctg(x)\,e^{-2x} \quad \square$$

(3) Resuelva la EDO siguiente

$$3y''' - 4\,y' = 5$$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

Resolvamos en primer lugar la ecuación diferencial homogénea asociada

$$3y''' - 4\,y' = 0$$

La ecuación polinomial asociada es $3\,r^3 - 4r = 0$

$$3\,r^3 - 4r = 0 \Rightarrow r(3r^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ r_3 = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego la solución de la ecuación diferencial homogénea es

$y_h(x) = c_1 + c_2\,e^{\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x} + c_3\,e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x}$

Ahora determinemos una solución particular de la ecuación no homogénea

$y_p(x) = A + B\,x$

$y_p{}'(x) = B$

$y_p{}''(x) = 0$

$y_p{}'''(x) = 0$

Luego, al reemplazar en la ecuación diferencial $3y''' - 4\,y' = 5$, se tiene que

$-4B \equiv 5 \Rightarrow B = -\frac{5}{4}$

Una posible solución particular, al considerar $A = 0$, es $y_p(x) = -\frac{5}{4}\,x$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial $3y''' - 4\,y' = 5$ es

$$y(x) = c_1 + c_2\,e^{\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x} + c_3\,e^{-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x} - \frac{5}{4}\,x \quad \square$$