

PAUTA TEST N° 6 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **PTOS. :** _____
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS **FECHA : Vi 01/07/11**

Resuelva los sistemas:

$$\begin{aligned} a) \quad x'_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4x_1 + 2x_2 \\ x'_2 &= 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

escrito en forma matricial está dado por:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{con } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios de la matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$-4 - 4\lambda + \lambda + \lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios asociados.

Para $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda_1 & 2 \\ 3 & -1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - (-2) & 2 \\ 3 & -1 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 3v_{11} + v_{12} = 0 \Rightarrow v_{12} = -3v_{11}$$

$$\therefore \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ -3v_{11} \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \text{ con } v_{11} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Podemos considerar como vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -2$ a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda_2 & 2 \\ 3 & -1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 - 5 & 2 \\ 3 & -1 - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -v_{21} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow v_{21} = 2v_{22}$$

$$\therefore \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{22} \\ v_{22} \end{bmatrix} = v_{22} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } v_{22} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Podemos considerar como vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 5$ a

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{es } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-2t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{5t} \mathbf{v}_2 = c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{5t} \\ -3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t} \end{bmatrix}$$

es decir

$$x_1(t) = c_1 e^{-2t} + 2 c_2 e^{5t}$$

$$x_2(t) = -3 c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t}$$

con c_1 y c_2 constantes reales. $\square$

$$b) \frac{dx}{dt} = x + 2y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = -z$$

Solución:

El sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = 3y + z$$

$$\frac{dz}{dt} = -z$$

escrito en forma matricial es

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{con } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Dado que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ es triangular sus valores propios son los elementos de la diagonal principal, es decir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -1$

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 - 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que la primera y segunda filas son iguales, por lo tanto nos quedamos con la segunda y la tercera filas.

$$-2v_{13} = 0 \Rightarrow v_{13} = 0$$

$$2v_{12} + v_{13} = 0 \Rightarrow 2v_{12} = 0 \Rightarrow v_{12} = 0$$

El vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } v_{11} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 - 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Notamos que la segunda y tercera filas son múltiplo escalar una de otra, por lo tanto nos quedamos con la primera y segunda filas.

$$v_{23} = 0$$

$$-2v_{21} + 2v_{22} + v_{23} = 0 \Rightarrow -2v_{21} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow v_{21} = v_{22}$$

El vector propio asociado a $\lambda_2 = 3$ es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{22} \\ v_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = v_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ con } v_{22} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_3 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 - (-1) & 2 & 1 \\ 0 & 3 - (-1) & 1 \\ 0 & 0 & -1 - (-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera y segunda filas se tiene que:

$$4 v_{32} + v_{33} = 0 \Rightarrow v_{33} = -4 v_{32}$$

$$2 v_{31} + 2v_{32} + v_{33} = 0 \Rightarrow 2 v_{31} + 2v_{32} - 4 v_{32} = 0 \Rightarrow v_{31} = v_{32}$$

El vector propio asociado a $\lambda_3 = -1$ es

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{32} \\ v_{32} \\ -4v_{32} \end{bmatrix} = v_{32} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \text{ con } v_{32} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{con } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{es } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{3t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{-t} \mathbf{v}_3 =$$

$$c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-t} \\ c_2 e^{3t} + c_3 e^{-t} \\ -4c_3 e^{-t} \end{bmatrix}$$

es decir

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + c_3 e^{-t}$$

$$y(t) = c_2 e^{3t} + c_3 e^{-t}$$

$$z(t) = -4c_3 e^{-t}$$

con c_1 , c_2 y c_3 constantes reales. $\square$

(60 puntos).