UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 5 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 45 MINUTOS FECHA : Mi 27/04/11

(1) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial $y^{(4)} - y^{(2)} = 0$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$$y^{(4)} - y^{(2)} = 0 \;\Rightarrow r^4 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 1 \\ r_4 = \;-1 \end{cases}$$

Por lo tanto

$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3\, e^{x} + c_4\, e^{-x}$, con $c_1,\ c_2,\ c_3$ y c_4 constantes reales cualesquiera. $\square$

(2) Resuelva el P.V.I. :

$$T''' + T'' - 3\,T' + T = 0$$

$T(0) = 1$
$T'(0) = 2$
$T''(0) = 4$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$$T''' + T'' - 3\,T' + T = 0 \;\Rightarrow r^3 + r^2 - 3r + 1 = 0$$

Observamos que $r = 1$ es una raíz del polinomio $r^3 + r^2 - 3r + 1,$ luego

$$r^3 + r^2 - 3r + 1 \;:\; r - 1 = \; r^2 + 2r - 1$$
$$^{(-)}\, r^3 \;-\; ^{(+)}r^2$$

$$
\begin{array}{l}
- - - - - - - - - - \\
\quad 2\,r^2 - 3r + 1 \\
{}^{(-)}2r^2 - {}^{(+)}2r \\
- - - - - - - - - - \\
\qquad - r + 1 \\
\quad - {}^{(+)}r + {}^{(-)}1 \\
\quad - - - - - - - - - \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

De lo anterior tenemos que : $r^3 + r^2 - 3r + 1 = (r-1)(r^2 + 2r - 1)$
Así

$$
r^3 + r^2 - 3r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2+2r-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r - 1 = 0 \\ r^2 + 2r - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow
$$

$$
\begin{cases} r_1 = 1 \\ r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} r_2 = \, -1 + \sqrt{2} \\ r_3 = \, -1 - \sqrt{2} \end{cases} \end{cases}
$$

La solución general es :

$$
T(x) = c_1 e^x + c_2\, e^{(\sqrt{2}-1)\,x} + c_3\, e^{(-\sqrt{2}-1)x}
$$

Consideremos ahora las condiciones iniciales

$$
T(0) = 1 \Rightarrow \; c_1 + c_2 + c_3 = 1 \qquad (*)
$$

$$
T\,'(x) = c_1\, e^x + (\sqrt{2}\, - 1)\, c_2\, e^{(\sqrt{2}-1)\,x} - (\sqrt{2}\, + 1)\, c_3 e^{(-\sqrt{2}-1)x} \; \Rightarrow
$$

$$
T\,'(0) = c_1 + (\sqrt{2}\, - 1)\, c_2 - (\sqrt{2}\, + 1) c_3 = 2 \qquad (**)
$$

$$
T\,'\,'(x) = c_1\, e^x + (\sqrt{2}\, - 1)^2\, c_2\, e^{(\sqrt{2}-1)\,x} + (\sqrt{2}\, + 1)^2\, c_3 e^{(-\sqrt{2}-1)x} \Rightarrow
$$

$$
T\,'\,'(0) = c_1 + (\sqrt{2}\, - 1)^2\, c_2\, + (\sqrt{2}\, + 1)^2\, c_3 = 4 \qquad (***)
$$

De $(*)$, $(**)$ y $(***)$ se obtiene el sistema matricial :

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}\, - 1 & -\,(\sqrt{2}\, + 1) & 2 \\ 1 & (\sqrt{2}\, - 1)^2 & (\sqrt{2}\, + 1)^2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow F_1(-1) + F_2 \, ; F_1(-1) + F_3
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 1 \\ 0 & 2-2\sqrt{2}+1-1 & 2+2\sqrt{2}+1-1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 1 \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(-\sqrt{2})+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 1 \\ 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene que :

$(4+4\sqrt{2})\, c_3 = 3-\sqrt{2} \Rightarrow c_3 = \frac{4\sqrt{2}-5}{4}$

$c_2 = \frac{-4\sqrt{2}-5}{4}$

$c_1 = \frac{7}{2}$

Finalmente la solución es :

$$T(x) = \frac{7}{2}e^{x} + \frac{-4\sqrt{2}-5}{4}\, e^{(\sqrt{2}-1)\,x} + \frac{4\sqrt{2}-5}{4}\, e^{(-\sqrt{2}-1)x} \ \square$$

(3) Hallar la solución general de la ecuación $y^{(4)} + 6\,y'' + 9\,y = 0$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$y^{(4)} + 6\,y'' + 9\,y = 0 \Rightarrow r^4 + 6r^2 + 9 = 0 \Rightarrow v^2 + 6v + 9 = 0$

con $v = r^2$

$$v = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \begin{cases} v_1 = -3 \\ v_2 = -3 \end{cases}$$

Para $v_1 = -3$:

$$r^2 = -3 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{3}\, i \\ r_2 = -\sqrt{3}i \end{cases}$$

Para $v_2 = -3$:

$$r^2 = -3 \Rightarrow \begin{cases} r_3 = \sqrt{3}\, i \\ r_4 = -\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$y(x) = c_1\, cos(\sqrt{3}x) + c_2\, sen(\sqrt{3}x) + c_3\, x\, cos(\sqrt{3}x) + c_4\, x\, sen(\sqrt{3}x)\,,$$

con $c_1,\ c_2,\ c_3$ y c_4 constantes reales cualesquiera. ❑