UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST Nº 4 ECUACIONES DIFERENCIALES
INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ PTOS. :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA FECHA : Ju 03/11/11

(1) Resuelva el PVI

$$3\,y''' + 2\,y'' + y' = 0$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \text{ y } y''(0) = 4$$

(20 puntos).

Solución:

$$3\,y''' + 2\,y'' + y' = 0 \Rightarrow 3\,r^3 + 2\,r^2 + r = 0 \Rightarrow r\,(3\,r^2 + 2\,r + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ 3\,r^2 + 2\,r + 1 = 0 \end{cases}$$

$$3\,r^2 + 2\,r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} \Rightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} \Rightarrow r = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r_2 = \frac{-1+\sqrt{2}\,i}{3} \\ r_3 = \frac{-1-\sqrt{2}\,i}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\,i \\ r_3 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\,i \end{cases}$$

De lo anterior se concluye que la solución general de la ecuación diferencial $3\,y''' + 2\,y'' + y' = 0$ es $y(x) = c_1 + e^{-\frac{1}{3}x}\left[c_2\,cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\right) + c_3\,sen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\right)\right]$

Consideremos ahora las condiciones iniciales.

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\left[c_2\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) + c_3\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right] +$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}c_2\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,c_3\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right]$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{3}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\,c_3 = -1$$

$$y''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}\left[c_2\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) + c_3\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right] -$$

$$\frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}x}\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}\,c_2\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,c_3\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right] -$$

$$\frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}x}\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}c_2\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) + \frac{\sqrt{2}}{3}\,c_3\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right] +$$

$$e^{-\frac{1}{3}x}\left[-\frac{2}{9}c_2\,cos\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big) - \frac{2}{9}\,c_3\,sen\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}\,x\Big)\right]$$

$$y''(0) = \frac{1}{9}c_2 - \frac{\sqrt{2}}{9}\,c_3 - \frac{\sqrt{2}}{9}\,c_3 - \frac{2}{9}c_2 = 4 \Rightarrow -\frac{1}{9}c_2 - \frac{2\sqrt{2}}{9}\,c_3 = 4$$

El sistema a resolver es

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$-\frac{1}{3}c_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\,c_3 = -1$$

$$-\frac{1}{9}c_2 - \frac{2\sqrt{2}}{9}\,c_3 = 4$$

Usemos el método de Gauss para resolverlo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2\sqrt{2}}{9} & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(-1/3)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

$- \frac{\sqrt{2}}{3}\, c_3 = \frac{13}{3} \Rightarrow c_3 = -\, \frac{13}{\sqrt{2}}$

$- \frac{1}{3} c_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\, c_3 = -1 \Rightarrow c_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\, c_3 + 1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow c_2 = \frac{1 - \frac{13}{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow c_2 = -10$

$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2 \Rightarrow c_1 = 1 + 10 \Rightarrow c_1 = 11$

Finalmente podemos decir que la solución del PVI

$$3\, y''' + 2\, y'' + y' = 0$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \text{ y } y''(0) = 4$$

está dada por

$y(x) = 11 + e^{-\frac{1}{3}x} \left[-10\, cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, x \right) - \frac{13}{\sqrt{2}}\, sen\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, x \right) \right]$ ❑

(2) Resuelva, en el intervalo $(0, \infty)$, la EDO

$x^2\, y'' + 3x\, y' = 0$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

Notamos que $y_1(x) = 1$ es solución de la EDO dada, porque la primera y la segunda derivada de una constante es cero, y por lo tanto se cumple la igualdad.

Usemos el método de reducción de orden para obtener la segunda solución; para ello debemos asegurarnos que el coeficiente de la mayor derivada sea igual a 1. Si dividimos la EDO $x^2\, y'' + 3x\, y' = 0$ por x^2, recordando que $x \in (0, \infty)$, se obtiene

$y'' + \frac{3}{x}\, y' = 0$

De la ecuación anterior se observa que $p(x) = \frac{3}{x}$

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{\left[\,y_1(x)\,\right]^2}\,dx = \int e^{-\int p(x)\,dx}\,dx = \int e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}\,dx =$$

$$\int e^{-3\,ln(x)}\,dx = \int e^{\,ln(x^{-3})}\,dx = \int x^{-3}\,dx = -\tfrac{1}{2}x^{-2}$$

Finalmente la solución general de la EDO $x^2\,y'' + 3x\,y' = 0$ es

$y(x) = c_1 - \frac{c_2}{2}x^{-2}$, con c_1 y c_2 constantes reales. $\square$

(3) Obtenga $y(x)$ si se sabe que $y^{(4)} = 1$

(20 puntos).

<u>Solución:</u>

$$y^{(4)} = 1 \Rightarrow \int y^{(4)}\,dx = \int dx \Rightarrow y^{(3)} = x + c_1 \Rightarrow \int y^{(3)}\,dx = \int (x + c_1)\,dx \Rightarrow$$

$$y^{(2)} = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1\,x + c_2 \Rightarrow \int y^{(2)}\,dx = \int (\tfrac{1}{2}x^2 + c_1\,x + c_2)\,dx \Rightarrow$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}c_1\,x^2 + c_2\,x + c_3 \Rightarrow$$

$$\int y'\,dx = \int (\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}c_1\,x^2 + c_2\,x + c_3)\,dx \Rightarrow$$

$$y(x) = \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}c_1\,x^3 + \tfrac{1}{2}\,c_2\,x^2 + c_3\,x + c_4$$

Finalmente la función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial $y^{(4)} = 1$ es

$y(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}c_1\,x^3 + \frac{1}{2}\,c_2\,x^2 + c_3\,x + c_4$ $\square$